九州大学集中講義ノート

戸松 玲治

平成 25 年 2 月 18 日

1 はじめに

これは, 2011 年 10 月 11 日から 14 日までの期間に九州大学で行った集中講義をまとめたノートです. 内容は若干味付けしてあります.

今回の集中講義ではどこかで聞いたフレーズですが, 「早い, うまい, 安い (?)」を目標にしました. 集中講義のタイトルは「コンパクト群と作用素環」でしたが[1], 実際には実数群も含めて群作用について大きく眺めるようにしました.

Tex 化するにあたって, 講義でも述べましたが, 定義, 定理, 証明のようなあんまりがちがちの数学にしないように努力しました. まとめるのは各自にまかせて, 完全にやり尽くさない方針です. また所々にある「問題」はほとんどレポート問題として出したものです. これを随所に配置して授業のスピードアップを図りました. この備忘録代わりのノートが何かの役に立つとうれしいです.

2 von Neumann 環

2.1 von Neumann 環, factor の定義

今回興味のある von Neumann 環は大抵の場合 (超積環を除いて) 可分です. それに伴って Hilbert 空間も可分です. 可分でない von Neumann 環の場合ともろもろの定義が少しずれますが, それは各自の調査にまかせて, この流儀で進むことにします.

H を Hilbert 空間, $B(H)$ を H 上の有界作用素のなす Banach 空間とします. H の恒等作用素 1 を含む $*$ 部分環 $M \subset B(H)$ が弱位相で閉じているとき, **von Neumann 環**と呼びます. 部分集合 $S \subset B(H)$ の commutant S' を $S' := \{x \in B(H) \mid xy = yx,\ \forall y \in S\}$ と定めるとき, M が von Neumann 環であることと, $M'' = M$ が成り立つことは同値です (double commutant theorem). このことか

[1] ちなみに元々のタイトルは「Kac 型コンパクト量子群と作用素環」.

ら, 上の「弱位相で閉じる」というところを強位相, 強 $*$ 位相, σ 弱位相, σ 強位相, σ 強 $*$ 位相で取り替えてもよいことがわかります. M のユニタリのなす集合を $U(M)$ と書きます.

また M の **predual** M_* も重要です. $L^1(H)$ をトレースクラス作用素のなす Banach 空間とすると, $B(H)$ は Banach 空間として $L^1(H)$ の双対空間となり, 汎弱位相は σ 弱位相と一致します. von Neumann 環 M は σ 弱閉ですから, M の極を $M_\perp := \{\varphi \in L^1(H) \mid \varphi(x) = 0,\ \forall x \in M\}$ とし, $M_* := B(H)/M_\perp$(商 Banach 空間) とすると, Banach 空間として $M = (M_*)^*$ であることが分かります. 今 M_* は具体的に構成したのですが, M の predual となる Banach 空間は自然に等距離同型であることも知られています (Diximier). ちなみに C* 環で predual をもつもの (W* 環と呼ばれる) は von Neumann 環となる (Hilbert 空間 H 上に正則かつ忠実に表現できる) ことが知られています (境).

M の中心 $Z(M) := M' \cap M$ が $\mathbb{C}$ であるとき, M は **factor** であるといいます. すべての von Neumann 環は factor の直積分の形をしているので, factor は根本的に重要な von Neumann 環であるといえます.

たとえば行列環 $M_n(\mathbb{C})$ は factor であり, 逆に, 有限次元な factor は行列環となります. その一般化で, $B(H)$ も factor です. またもしも factor M が minimal projection をもてば, $B(H)$ に同型となります. これ以外の無限次元 factor を構成するにはどうすればよいのでしょうか.

2.2 Type の分類

このノートでは, 有限型であることをトレースの存在で定義します.

定義 2.1. M を (可分)von Neumann 環とする.

- 正則状態[2] $\tau\colon M \to \mathbb{C}$ が, $\tau(xy) = \tau(yx)$ を満たすとき, τ を**正則トレース状態**という.
- M が忠実[3]な正則トレース状態をもつとき, M は**有限型**であるという.
- M が有限型 factor かつ無限次元のとき, **II_1 型 factor** という.

非自明な事実として, M が有限型であることと, isometry は必ず unitary であることとは同値であることが知られています. すべての factor は I 型, II 型, III 型に分かれ, さらに II 型は II_1 型, II_∞ 型に, III 型は III_λ 型 $(0 \le \lambda \le 1)$ に細分されます. I 型 factor は前出の $B(H)$ と同型, II_∞ 型 factor は II_1 型 factor と $B(\ell^2)$ とのテンソル積 (後述) です. I, II 型をまとめて**半有限型**といいます. これはト

[2] 正則性: $\tau \in M_*$, つまり, $x_\lambda \overset{\text{weak}}{\to} x$ のとき $\tau(x_\lambda) \to \tau(x)$ ということ.
[3] $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$

レース荷重 ($\tau\colon M_+ \to [0,\infty]$ で忠実正則半有限トレース) をもつことと同値です. Factor M が III 型であるための必要十分条件はすべての 0 でない射影 p は 1 と Murray-von Neumann 同値[4]であることです. このことからたとえば, M と pMp は同型であることが分かります.

さて II_1 型 factor の具体的構成を行いましょう.

例 2.2 (群-測度空間構成)**.** Γ を離散群, (X,μ) を原子をもたない確率空間とします. Γ が X に測度を保つ変換群として作用しているとします ($\mu(gE)=\mu(E)$). さらに, この変換群としての作用は自由[5]かつエルゴード的[6] であるとします.

Γ は $L^\infty(X)$ に, $\alpha_g(f)(x) := f(g^{-1}x)$ で作用します. このとき, §3.4 で説明する接合積 $L^\infty(X)\rtimes\Gamma$ は II_1 型 factor となります.

たとえば, $\Gamma=\mathbb{Z}$, $X=\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, とし, X には弧の長さを測る確率測度を与えておきます. 作用を $n\cdot z := e^{2\pi ni\theta}z$ と定めると, θ が無理数であれば, これは自由かつエルゴード的な保測変換を定めます. それゆえ $L^\infty(\mathbb{T})\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ は II_1 型 factor となります.

例 2.3 (群 von Neumann 環)**.** Γ を離散群とします. $\ell^2(\Gamma) := \{\xi\colon\Gamma\to\mathbb{C} \mid \sum_g |\xi(g)|^2 < \infty\}$ とし, Γ の左正則表現を $\lambda_g\xi(h) := \xi(g^{-1}h)$ と定めます. このとき λ_g たちで生成される von Neumann 環 $L(\Gamma)$ を群 von Neumann 環と呼びます. 群 von Neumann 環は必ず有限型となります. 実際, $\delta_e\in\ell^2(\Gamma)$ を単位元 $e\in\Gamma$ で 1, 残りは 0 を取る関数として, $\tau(x)=\langle x\delta_e,\delta_e\rangle$ とすれば, これは忠実正則トレース状態です.

問題 2.4. $L(\Gamma)$ が II_1 型 factor であるためには, Γ が ICC であることが必要十分であることを示せ.

たとえば無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty := \bigcup_N \mathfrak{S}_N$ や自由群 F_n $(n\geq 2)$ の群 von Neumann 環は II_1 型 factor であることが分かります. この 2 つの環は非同型であることが知られています.

例 2.5 (無限テンソル積構成)**.** A を UHF 環 $M_{2^\infty} := \bigotimes_{n=1}^\infty M_2(\mathbb{C})$ とします. これはトレース状態 τ をただ一つもちます. τ で GNS 表現し, $\pi_\tau(A)$ の弱閉包を M とすれば II_1 型 factor となります. 無限テンソル積については後述します.

2.3 有限個のテンソル積

$M\subset B(H)$, $N\subset B(K)$ を von Neumann 環とします. このとき代数的なテンソル積 $M\otimes_{\mathrm{alg}}N = \{\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i \mid x_i\in M, y_i\in N\}$ は $*$ 環となり, テンソル

[4] $p\sim q \Leftrightarrow \exists\, v\in M,\ p=v^*v,\ q=vv^*$

[5] ほとんどすべての $x\in X$ に対して, $\Gamma\ni g\mapsto gx\in X$ が単射.

[6] $gE=E,\ \forall g\in\Gamma \Rightarrow E=\emptyset$ または $E=X$ (測度零集合を除いた等号).

積 Hilbert 空間 $H \otimes K$ に忠実に作用します. $B(H \otimes K)$ の中で弱閉包を取ったものを $M \otimes N$ と書き, von Neumann 環のテンソル積といいます. テンソル積と commutant の間には次の奇跡的な関係があります.

定理 2.6 (冨田)**.** $(M \otimes N)' = M' \otimes N'$.

この定理を自明な等式 $(A \otimes B) \vee (C \otimes D) = (A \vee C) \otimes (B \vee D)$ に応用すると, 共通部分についての等式

$$(M \otimes N) \cap (P \otimes Q) = (M \cap P) \otimes (N \cap Q)$$

を得ます. よって

$$Z(M \otimes N) = (M \otimes N) \cap (M \otimes N)' = (M \otimes N) \cap (M' \otimes N') = Z(M) \otimes Z(N)$$

となり, とくに M, N が factor であることと, $M \otimes N$ が factor であることは同値であることが分かります.

2.4 単射性と AFD

Von Neumann 環 M の中に, 行列環の増大列 $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ で $\bigcup_n M_n$ が弱稠密になるように取れるとき M を **AFD** (approximately finite dimensional) であるといいます[7]. 例 2.5 でできる環は AFD II_1 型 factor です.

定理 2.7 (Murray-von Neumann)**.** AFD II_1 型 factor はすべて同型である.

環が AFD であることを見るためには, 内部構造をよく把握しなくてはならないので一般に大変です. 例 2.2 で出てきた $L^\infty(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ は, エルゴード理論の結果 (II_1 型のエルゴード変換は軌道同型の意味で一意的) を援用することで例 2.5 の環と同型であることがいえます (くわしくは [13, 14] 参照).

ここで AFD よりも弱い (ように見える) 性質である単射性について復習しておきます. Von Neumann 環 $M \subset B(H)$ が**単射的** (injective) であるとは, (正則とは限らない) ノルム 1 射影 $E\colon B(H) \to M$ が存在することをいいます. この性質が M の H への表現によらないことを見るには, von Neumann 環の準同型が「増大, 可換子環の射影でカット, 空間同型」で得られることをおさえればやさしいでしょう.

問題 2.8. AFD ならば単射的であることを示せ. Hint: 行列環のときにまずやる. 次に単射的部分環の増大列は単射的であることを超フィルターを使って示す. M のノルム閉球は弱位相でコンパクトであることを利用する.

[7]超有限 (hyperfinite) ともいう.

実は都合のいいことに, 単射性は AFD を導きます [2].

定理 2.9 (Connes)**.** 可分な von Neumann 環に対して, 単射性と AFD 性は同値.

例 2.2 の $L^\infty(\mathbb{T}) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ が単射的であることを見るのはやさしく (実際この接合積は, $L^\infty(\mathbb{T}) \otimes B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ への $\mathbb{Z}$ 作用の固定点環に等しい), Connes の定理から AFD であることも分かります.

3 群作用と接合積

この節では作用素環への群の作用というものを考えます.

3.1 自己同型群

$\mathrm{Aut}(M)$ を M の自己同型群とします. つまり M の全単射な $*$ 準同型の集まりです (正則性は自動的). ユニタリ $u \in M$ に対して自己同型 $\mathrm{Ad}\, u$ を $\mathrm{Ad}\, u(x) = uxu^*$ として定めます. $\mathrm{Ad}\, u$ の形をしている自己同型を**内部的自己同型** (inner automorphism) といい, そうでないものを**外部的自己同型** (outer automorphism) といいます. 内部的自己同型のなす集合を $\mathrm{Int}(M)$ と書きます (intérieur から). C* 環の場合は $\mathrm{Inn}(A)$ と書きます. 次の結果は基本的です.

問題 3.1. $\mathrm{Aut}(B(H)) = \mathrm{Int}(B(H))$.

つまり $B(H)$ には外部的自己同型が存在しません. 他の環の外部的自己同型の構成については後述するので, ひとまず置いておいて先に進みましょう.

3.2 群作用

自己同型の列 α_n が α に収束することを,

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi \circ \alpha_n - \varphi \circ \alpha\| = 0, \quad \forall \varphi \in M_*$$

であることと定めると (u-topology), $\mathrm{Aut}(M)$ は Polish 群となります.

G を局所コンパクト群, $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(M)$ を群準同型とします. α が連続であるときに**作用** (action) と呼びます. 連続性の条件 $\lim_{g\to e} \varphi \circ \alpha_g = \varphi$, $\forall \varphi$ は, M が II_1 型 factor のときは,

$$\lim_{g\to e} \|\alpha_g(x) - x\|_2 = 0, \quad \forall x \in M$$

と同等です. ここで $\|x\|_2 := \tau(x^*x)^{1/2}$. つまり, $g \to e$ ならば強位相で $\alpha_g(x) \to x$ ということです.

C^* 環への群作用は, $\lim_{g\to e}\|\alpha_g(x)-x\|=0$ が C^* 環の各点 x で成り立つことを意味します.

作用 α からは, 不動点環 (fixed point algebra) M^α と接合積 $M\rtimes_\alpha G$ が出来ます. ここでは不動点環だけ定義しておきます. $M^\alpha:=\{x\in M\mid \alpha_g(x)=x,\forall g\in G\}$.

例 3.2. $U\colon G\to B(H)$ を (強連続) ユニタリ表現とします. このとき $\mathrm{Ad}\,U_g$ は $B(H)$ への作用を定めます. またもし von Neumann 環 $M\subset B(H)$ を不変にしていれば, $\mathrm{Ad}\,U_g|_M$ は M への作用を定めます.

例 3.3. A を C^* 環, $G\overset{\alpha}{\curvearrowright}A$ を作用とし, 状態 φ を不変にしているとします. このとき GNS Hilbert 空間 H_φ 上に G のユニタリ表現が $U_g\pi_\varphi(x)\xi_\varphi=\pi_\varphi(\alpha_g(x))\xi_\varphi$ によって定まります. すると $\pi_\varphi(A)''$ は $\mathrm{Ad}\,U_g$ によって不変であり, $\pi_\varphi(A)''$ への作用を定めます.

例 3.4. α,β を G の M,N への作用とすると, $\alpha_g\otimes\beta_g$ は $M\otimes N$ への作用となる.

例 3.5. $\alpha\in\mathrm{Aut}(M)$ は作用 $\mathbb{Z}\ni n\mapsto\alpha^n\in\mathrm{Aut}(M)$ を作る.

例 3.6. 入れ替え自己同型 $\sigma\colon M\otimes M\ni x\otimes y\mapsto y\otimes x\in M\otimes M$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用となる. 一般に n 回テンソル積 $M^{\otimes n}$ には対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する.

3.3 無理数回転環

作用を考えると, いろいろと環の構造が分かることがあります. 例として無理数回転環 A_θ を考えます. これは二つのユニタリ u,v で生成された C^* 環で次の関係式をみたす普遍的なものです: $uv=e^{2\pi i\theta}vu$. θ は無理数です. さて $\gamma,\gamma'\in\mathbb{T}$ に対して, u を γu に, v を $\gamma' v$ に置き換えても同じ等式が成り立つことに注意しましょう. A_θ は普遍性をもつので,

$$\alpha_{(\gamma,\gamma')}(u)=\gamma u,\quad \alpha_{(\gamma,\gamma')}(v)=\gamma' v$$

となる $\alpha_{(\gamma,\gamma')}\in\mathrm{Aut}(A_\theta)$ が存在します. 写像 $\alpha\colon\mathbb{T}^2\to\mathrm{Aut}(A_\theta)$ が作用を定めることは明らかでしょう.

ここで次の写像 $\tau\colon A_\theta\to A_\theta$ を考えます.

$$\tau(x):=\int_{\mathbb{T}^2}\alpha_{(\gamma,\gamma')}(x)\,d\gamma d\gamma'=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_{(e^{ix},e^{iy})}(x)\,dxdy.$$

この写像の値域は α の固定点環 $A_\theta^\alpha:=\{a\in A_\theta\mid\alpha_{(\gamma,\gamma')}(x)=x,\ \forall\gamma,\gamma'\in\mathbb{T}\}$ に等しく, $\tau|_{A_\theta^\alpha}=\mathrm{id}$ がいえます. コンパクト群の作用については, いつでもこのようにして固定点環へのノルム 1 射影を作ることができます. 今の場合 $A_\theta^\alpha=\mathbb{C}$ であることを示しましょう. そのためにノルム稠密な部分環 $A_\theta^\infty:=\mathrm{span}\{u^mv^n\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$

を準備します. すると, $\alpha_{(\gamma,\gamma')}(u^m v^n) = \gamma^m \gamma'^n u^m v^n$ であるため, $\tau(u^m v^n) = \delta_{m,0}\delta_{n,0}$ であることが分かります. 特に $\tau(A_\theta^\infty) = \mathbb{C}$ となります. τ はノルム連続ですから $A_\theta^\alpha = \tau(A_\theta) = \mathbb{C}$ が分かりました. つまり積分で平均化する写像 τ は A_θ の状態です.

問題 3.7. τ は忠実トレース状態であることを示せ.

一般に固定点環が自明な作用を**エルゴード作用**と呼びます. 実は上の問題は群が一般のコンパクト群であるときにもなりたちます [4].

定理 3.8 (Høegh-Krohn-Landstad-Stømer)**.** $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} A$ をコンパクト群の単位的 C* 環 A(あるいは von Neumann 環でもよい) へのエルゴード作用とする. このとき $\tau(x) := \int_G \alpha_g(x)\, dg$ は忠実 (resp. 正則) トレース状態である.

コンパクト群のエルゴード作用が見つかると, このようにいろいろと強い性質が分かります. たとえば環が核型であることが分かります. これを少し一般化した形で証明してみましょう.

定理 3.9. $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} A$ をコンパクト群の作用とする. もし A^α が核型 (nuclear) であれば, A も核型である.

証明. B を C* 環として, 自然な全射準同型 $q\colon A \otimes_{\max} B \cong A \otimes_{\min} B$ の単射性を示す. まず $\alpha_g \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{Aut}(A \otimes_{\mathrm{alg}} B)$ は $A \otimes_{\max} B$ と $A \otimes_{\min} B$ に拡張する. これらをそれぞれ $\beta_g := \alpha_g \otimes_{\max} \mathrm{id}$, $\gamma_g := \alpha_g \otimes_{\max} \mathrm{id}$ と書く. 固定点環へ落とす射影を $E_\beta := \int_G \beta_g\, dg$, $E_\gamma := \int_G \gamma_g\, dg$ と書くと, 次の可換図式ができあがります.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\max} B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "E_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_{\min} B \arrow[d, "E_\gamma"] \\
(A \otimes_{\max} B)^\beta \arrow[r, "q"] & (A \otimes_{\min} B)^\gamma
\end{tikzcd}$$

これは $A \otimes_{\max} B$ において稠密な部分環 $A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ の行き先を調べれば分かります.

$A \otimes_{\max} B$ において, $E_\beta(A \otimes_{\mathrm{alg}} B) = A^\alpha \otimes_{\mathrm{alg}} B$ ですから, $(A \otimes_{\max} B)^\beta = \overline{A^\alpha \otimes_{\mathrm{alg}} B}^{\|\cdot\|_{\max}}$ となります. 同様に $(A \otimes_{\min} B)^\gamma = \overline{A^\alpha \otimes_{\mathrm{alg}} B}^{\|\cdot\|_{\min}}$. ただこの時点では閉包を取っているノルムは $A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ の極大ノルムを制限したものであって, $A^\alpha \otimes_{\mathrm{alg}} B$ の極大ノルムではないことに注意しておきましょう.

しかし, 今 A^α は核型なので, これらのノルムは一致しなくてはなりません. したがって $(A \otimes_{\max} B)^\beta = A^\alpha \otimes_{\max} B$ が分かります (自然な対応での等号). 一方, 極小ノルムを制限したものはいつでも極小なので, 自然な等号 $(A \otimes_{\min} B)^\gamma = A^\alpha \otimes_{\min} B$ が成り立ちます. まとめると次の可換図式ができます.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_{\max} B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "E_\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_{\min} B \arrow[d, "E_\gamma"] \\
A^\alpha \otimes_{\max} B \arrow[r, "q"] & A^\alpha \otimes_{\min} B
\end{tikzcd}$$

さて $x \in A \otimes_{\max} B$ が $q(x)=0$ であったとしましょう．すると $q(x^*x)=0$ であり，上の可換図式から $q(E_\beta(x^*x))=0$ となります．A^α は核型ですから，下の $*$ 準同型 q は単射です．よって $E_\beta(x^*x)=0$ です．ところで $E_\beta=\int_{\mathbb{T}}\beta_g\,dg$ と自己同型の平均で定義されているので，$\beta_g(x^*x)=0$ が各 $g\in\mathbb{T}$ について言えます．よって $x=0$ です． □

というわけで A_θ は核型であることが分かります．ちなみに一般には，$A\subset B$ であっても自然な $*$ 準同型 $A\otimes_{\max} C\to B\otimes_{\max} C$ は単射とは限らないので注意してください [1].

次に A_θ が単純であることを見ましょう．近似的に内部的な自己同型を次のように定めます:

$$\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta) := \{\alpha\in\mathrm{Aut}(A_\theta) \mid \exists u_1,u_2,\cdots\in U(A_\theta) \text{ s.t. } \alpha=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Ad}\,u_n\}.$$

重要なことは各 $\alpha\in\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta)$ は，閉イデアルを大域的に不変にするということです．$\alpha_{(\gamma,\gamma')}\in\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta)$ が示せたと仮定します．すると非零閉イデアル I が 1 を含むことを次のように示せます．非零な $x\in I$ を取ってきます．すると $\tau(u^m v^n x)\neq 0$ となる m,n が存在します (τ が忠実であることと，A_θ^∞ が稠密であることから)．したがって $y:=u^m v^n x\in I$ とすれば，$0\neq\tau(y)=\int_{\mathbb{T}^2}\alpha_{(\gamma,\gamma')}(y)\,d\gamma d\gamma'$ となります．

しかし右辺の積分の中身は I に含まれるため，その積分も I に含まれます．よって非零なスカラー $\tau(y)$ が I に含まれることになり，$I=A_\theta$ が分かりました．

そこで $\alpha_{(\gamma,\gamma')}\in\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta)$ を示すことにします．それには $\alpha_{(\gamma,\gamma')}=\alpha_{(\gamma,1)}\alpha_{(1,\gamma')}$ だから $\alpha_{(\gamma,1)},\alpha_{(1,\gamma')}\in\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta)$ を示せばよいです．対称性から $\alpha_{(\gamma,1)}$ のみ考えます．今 $\{e^{2\pi ni\theta}\mid n\in\mathbb{Z}\}$ が $\mathbb{T}$ で稠密であることを思い出すと，$n_1,n_2,\cdots\in\mathbb{Z}$ を $e^{-2\pi n_k i\theta}\to\gamma$ となるように取ることが出来ます．$\mathrm{Ad}\,v^{n_k}$ が $\alpha_{(\gamma,1)}$ を近似することを見るのは易しいです．

別の応用もあります．τ' を別のトレース状態とします．各 $\alpha\in\overline{\mathrm{Inn}}(A_\theta)$ は τ を不変にすることから ($\tau\circ\mathrm{Ad}\,u=\tau$ を思い出す)，$\tau'\circ\alpha_{(\gamma,\gamma')}=\tau'$ が分かります．左辺で $(\gamma,\gamma')\in\mathbb{T}^2$ について平均を取ると，$\tau'(\tau(x))=\tau'(x)$ となり，もちろん $\tau(x)=\tau'(x)$ です．つまり A_θ のトレース状態は τ の 1 つだけであるということが分かりました．特に A_θ を GNS 表現してできる von Neumann 環 $\pi_\tau(A_\theta)''$ は II_1 型 factor であることが分かります．

まとめ 3.10. A_θ の単純性，核型性，トレース状態が 1 つしかないことがコンパクト群 $\mathbb{T}^2$ の自然な作用を考えることによって明らかになった．

問題 3.11. Cuntz 環に対して同様の考察を行えるかどうか調べよ．

3.4 接合積

さて von Neumann 環に話を戻して, $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を局所コンパクト群 G の von Neumann 環 $M \subset B(H)$ への作用とします. α が例 3.2 のようにユニタリ表現から来るもの (共変表現) ととらえたいことが時々あります. これを可能にする 2 つの重要な方法があります. 1 つ目は標準型と呼ばれる Hilbert 空間 H に M を表現すること, もう 1 つは接合積を使うことです. 今回は接合積について説明します.

$L^2(G)$ によって Haar 測度で 2 乗可積分な関数のなす Hilbert 空間として, $\widetilde{H} := H \otimes L^2(G)$ と H を膨らませます. この空間の上に M の表現と G のユニタリ表現を次のように定めます.

$$(\pi_\alpha(x))\xi(g) := \alpha_{g^{-1}}(x)\xi(g), \quad (\lambda_g^\alpha \xi)(h) := \xi(g^{-1}h).$$

ここで $\lambda_g^\alpha = 1 \otimes \lambda_g$ に注意しておきます (λ_g は左正則表現). すると容易に次の式が導かれます.

$$\lambda_g^\alpha \pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(\alpha_g(x))\lambda_g^\alpha$$

よって λ_g^α が α_g を implement します.

さて M のコピー $\pi_\alpha(M)$ と G のコピー $\{\lambda_g^\alpha\}_{g\in G}$ から生成される von Neumann 環を**接合積** (crossed product) と呼び $M \rtimes_\alpha G$ と書きます. つまり

$$M \rtimes_\alpha G := \pi_\alpha(M) \vee \{\lambda_g^\alpha\}_{g\in G}''.$$

3.5 ユニタリ表現で implement された作用

作用 $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ がユニタリ表現 $U\colon G \to B(H)$ から来ている時, M と $U(G)$ で生成される環と, $M \rtimes_\alpha G$ を比べることを考えてみます.

問題 3.12. ユニタリ $V \in B(\widetilde{H})$ を

$$(V\xi)(g) = U_g\xi(g)$$

と定める. 次の等式を示せ.

$$V\pi_\alpha(x)V^* = x \otimes 1, \quad V\lambda^\alpha(g)V^* = U_g \otimes \lambda_g.$$

この結果から

$$\mathrm{Ad}\,V\colon M \rtimes_\alpha G \to (M \otimes \mathbb{C}) \vee \{U_g \otimes \lambda_g \mid g \in G\}'' \tag{3.1}$$

は空間的な同型であることが分かります. この議論でとくに M を無視してやると (あるいは $M = \mathbb{C}$ のとき), 左正則表現を増幅した表現 $1_H \otimes \lambda_g$ はテンソル積表現 $U_g \otimes \lambda_g$ とユニタリ同値であることが分かります[8].

[8] Fell の吸収原理 (absorption principle) と呼ばれます.

それゆえ $M \rtimes_\alpha G$ と $M \vee \{U_g\}_g''$ は λ_g の分だけ違うことが分かります. G がコンパクトであるとき (同型には一般にできませんが), λ_g を次のようにして取り除くことができます. 1_G を G 上の恒等的に 1 を取る関数とすると, G はコンパクトだから $1_G \in L^2(G)$ です. そこで射影 $e_G\colon L^2(G) \to \mathbb{C}1_G$ を考えます. すると, $\lambda_g e_G = e_G = e_G \lambda_g$ であることが分かります. e_G が $L(G)$ の極小な中心射影であることを見るには右正則表現とも交換することを言うか, あるいは明示的な公式 $e_G = \int_G \lambda_g \, dg$ を使えば分かることです. すると $\mathrm{Ad}\, V$ で $M \rtimes_\alpha G$ を送ってから $1 \otimes e_G$ でカットしてやることで全射

$$M \rtimes_\alpha G \twoheadrightarrow M \vee \{U_g \mid g \in G\}''$$

を得ます. この対応は $\pi_\alpha(x) \mapsto x$, $\lambda^\alpha(g) \mapsto U_g$ で与えられることに注意しておいてください.

コンパクトでない局所コンパクト群については, 一般に全射な準同型は構成できませんが, 標準型における共変系については次の結果が知られています.

定理 3.13. α を局所コンパクト群 G の von Neumann 環 M への作用とする. $M \subset B(H)$ を標準型とし, $U\colon G \to B(H)$ を α を implement する標準的ユニタリ表現とする. もしも α が可積分であれば, $*$ 準同型 $\rho\colon M \rtimes_\alpha G \to M \vee \{U_g \mid g \in G\}''$ が,

$$\rho(\pi_\alpha(x)) = x, \quad \rho(\lambda_g^\alpha) = U_g, \quad x \in M,\ g \in G$$

となるように存在する. したがって, $M \rtimes_\alpha G$ が factor ならば, $M \rtimes_\alpha G$ は $M \vee \{U_g \mid g \in G\}''$ と同型となる.

この結果は Paschke が局所コンパクト可換群の場合 [12], 一般の局所コンパクト (量子) 群の場合は Vaes によって証明されました [15]. Vaes は実際には必要十分条件であることも示しています.

さて, もう一度同型 (3.1) に戻ります. M の中へのユニタリ表現 $u\colon G \to U(M)$ があって $\alpha_g = \mathrm{Ad}\, u_g$ となる場合を考えましょう. 先に出てきた $u_g \otimes \lambda_g$ の u_g は M の元ですから省くことができ, $M \rtimes_\alpha G$ は自然に $M \otimes L(G)$ に同型となります. したがってユニタリ表現からくる内部的自己同型からなる作用を考えると, 接合積はテンソル積になってしまいあまり面白くありません. どこかで外部的になっている作用を考えることが大事なようです.

まとめ 3.14. 外部的自己同型が特に興味深い自己同型.

4 外部的作用

外部的作用というのは, もし $g \neq e$ なら α_g が外部的自己同型, つまり $\alpha_g \notin \mathrm{Int}(M)$ ということです. このような作用を具体的に構成することを考えます.

4.1 無限テンソル積による構成

$M_1, M_2, \dots$ を von Neumann 環, $\varphi_i \in (M_i)_*$ を状態とします. n 回のテンソル積 $\overline{M}_n := M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ 上にテンソル積状態 $\overline{\varphi}_n := \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ を用意しておきます. 埋め込み $\overline{M}_n \ni x \mapsto x \otimes 1 \in \overline{M}_{n+1}$ により $\overline{M}_n \subset \overline{M}_{n+1}$ と見なしておき, この合併 (帰納的極限) のノルム完備化をした C* 環を A と書きます. A には $\overline{\varphi}_n$ たちの拡張状態 φ が自然に定まり, それにより GNS 表現を考えられます. $\pi_\varphi(A)''$ を $M := \bigotimes_{n=1}^\infty (M_n, \varphi_n)$ と書き, M_n たちの**無限テンソル積**と呼びます. 閉包を取る前の $\bigcup_n \overline{M}_n$ の元は局所的な元と呼ばれます.

無限テンソル積を考えるときに重要な道具として条件付き期待値 $E_n \colon M \to \overline{M}_n$ があります. これは $\overline{\varphi}_n \circ E_n = \varphi$ となるように唯一つに定まるものです. 気持ち的には $(n+1)$ 番目以降のテンソル積成分を $\varphi_{n+1} \otimes \cdots$ でスライス (積分) したものです:

$$E_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_m \otimes 1 \otimes \cdots) = \varphi_{n+1}(x_{n+1}) \cdots \varphi_m(x_m)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

もちろん $E_n|_{\overline{M}_m} \circ E_m = E_n$ です.

問題 4.1. 次を示せ.

(1). 任意の $x \in M$ について, $x = \lim_{n\to\infty} E_n(x)$ (強収束).

(2). ノルム有界な列 $x_n \in M_n$ が $x_n = E_n(x_{n+1})$ を満たすとき, x_n はある $x \in M$ に強収束する (マルチンゲール収束定理).

問題 4.2. E_n たちを使って, $Z(M) = \bigotimes_{n=1}^\infty (Z(M_n), \varphi_n)$ を示せ.

無限テンソル積を使えば様々な自己同型を構成することができます. 今 α_n を M_n の自己同型で φ_n を不変にしているとします. このとき $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \in \mathrm{Aut}(M_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ の自然な拡張自己同型 α が M 上に定まります. これを $\alpha = \bigotimes_{n=1}^\infty \alpha_n$ と書きます. これがいつ内部的になるかについて次の結果があります. まずは欲張らずに有限個のテンソル積について調べてみましょう.

問題 4.3. M, N を von Neumann 環とする. α, β をそれぞれ M, N の自己同型とする. このとき, $\alpha \otimes \beta \in \mathrm{Int}(M \otimes N) \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Int}(M),\ \beta \in \mathrm{Int}(N)$.

定理 4.4 (Connes)**.** M_n たちが factor であるとする. このとき $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots$ が内部的であるための必要十分条件は次の 2 つの条件をみたすことである:

- 各 α_n は内部的である.
- $\alpha_n = \mathrm{Ad}\, u_n$ と $u_n \in U(M_n)$ で表したとき, $\sum_{n=1}^\infty (1 - |\varphi_n(u_n)|) < \infty$.

証明. α が $U \in U(M)$ によって $\mathrm{Ad}\, U$ と書けたとします. $\alpha = \alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \cdots)$ だから, 上の問題から α_1 と $\alpha_2 \otimes \cdots$ は内部的. これを繰り返せば, 各 α_n は内部的であることが分かります. そこで $\alpha_n = \mathrm{Ad}\, u_n$ となる $u_n \in U(M_n)$ を取りましょう. 必要ならば u_n に $\mathbb{T}$ の元を掛けることで, $\varphi_n(u_n) \geq 0$ と仮定できます. U についても $\varphi(U) \geq 0$ となるように取っておきます.

$\overline{u}_n := u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in \overline{M}_n$ とおきます. すると $x \in \overline{M}_n$ に対して, $UxU^* = \alpha(x) = \overline{u}_n x \overline{u}_n^*$ だから, $w_n := \overline{u}_n^* U$ は $(\overline{M}_n)' \cap M = \bigotimes_{k=n+1}^{\infty}(M_k, \varphi_k)$ に含まれます. したがって $U = \overline{u}_n w_n$ と表示できます ($\overline{u}_n$ と w_n はテンソル積状態 φ に対して独立的であることに注意).

ここで, $\lim_n \varphi(E_n(U^*)U) = \varphi(U^*U) = 1$ だから, ある番号 k 以降では $\varphi(E_n(U^*)U) > 1/4$ となります ($\varphi(E_n(U^*)U) = \varphi(E_n(U^*)E_n(U)) \geq 0$ に注意). $E_n(U^*)\overline{u}_n \in \overline{M}_n$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} 1/4 &< \varphi(E_n(U^*)U) = \varphi(E_n(U^*)\overline{u}_n)\varphi(w_n) \\ &= \varphi(E_n(U^*\overline{u}_n))\varphi(w_n) = \varphi(U^*\overline{u}_n)\varphi(w_n) \\ &= |\varphi(w_n)|^2 \quad \forall n \geq k. \end{aligned}$$

等式 $U = \overline{u}_m w_m$ から, $n < m$ のとき, $w_n = (u_{n+1} \otimes \cdots \otimes u_m \otimes 1 \otimes \cdots)w_m$ が分かるので, $\varphi(w_n) = \prod_{j=n+1}^{m} \varphi_j(u_j)\varphi(w_{m+1})$ となります. よって $m > n \geq k$ のとき, $1/2 < \prod_{j=n+1}^{m} \varphi_j(u_j)$. 右辺は単調減少なので 0 でない数に収束するから, $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\varphi_n(u_n)|) < \infty$. 逆に $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\varphi_n(u_n)|) < \infty$ を仮定する. このとき u_n たちを $\varphi_n(u_n) \geq 0$ となるように選べば, $\overline{u}_n$ があるユニタリ $U \in M$ に強収束する. 実際, $n < m$ のとき

$$\varphi((\overline{u}_n - \overline{u}_m)^*(\overline{u}_n - \overline{u}_m)) = 2 - 2\mathrm{Re}\,\varphi(\overline{u}_n^*\overline{u}_m) = 2 - 2\mathrm{Re}\prod_{j=n+1}^{m} \varphi_j(u_j).$$

この右辺は $n, m \to \infty$ のとき 0 に収束する. また同様に $\varphi((\overline{u}_n - \overline{u}_m)(\overline{u}_n - \overline{u}_m)^*) \to 0$. よってノルム有界列 $\overline{u}_n$ は M の強 $*$ 位相でコーシー列である. したがってあるユニタリ $U \in M$ に収束する. 明らかに $\mathrm{Ad}\, U = \mathrm{Ad}\, \overline{u}n = \alpha$ が $\overline{M}_n$ 上で成り立つから, 稠密性から $\mathrm{Ad}\, U = \alpha$. □

例 4.5. $n \geq 2$ として, ユニタリ $u \in M_n(\mathbb{C})$ を $|\operatorname{tr}(u)| \neq 1$($u \notin \mathbb{C}1_n$ ということに他ならない) となるものとして取ると $\mathrm{Ad}\, u \otimes \mathrm{Ad}\, u \otimes \cdots$ は II_1 型 factor $\bigotimes_1^{\infty}(M_n(\mathbb{C}), \operatorname{tr})$ 上の外部的自己同型.

例 4.6. $u_k = \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_k} \end{pmatrix}$ で $0 \leq \theta_k \leq \pi/2$ かつ $\theta_k \sim O(1/k^\gamma)$ とする ($\gamma > 1/2$). このとき

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\operatorname{tr}(u_k)|) = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \cos\theta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\sin^2\theta_k < \infty.$$

よって $\mathrm{Ad}\,u_1 \otimes \mathrm{Ad}\,u_2 \otimes \cdots$ は $\bigotimes_1^\infty (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$ 上の内部的自己同型.

例 4.7. 外部的自己同型が全く存在しない II_1 型 factor も知られています [6].

ここまでの議論を元に無限テンソル積型作用を構成します. G を局所コンパクト群, $u\colon G \to U(M)$ を factor M へのユニタリ表現とし, $\varphi \in M_*$ を忠実正則状態で $\varphi \circ \mathrm{Ad}\,u_g = \varphi$ を満たしているとします. このとき, 無限テンソル積 $N := \otimes_1^\infty (M, \varphi)$ の上に作用 $\alpha_g := \mathrm{Ad}\,u_g \otimes \mathrm{Ad}\,u_g \otimes \cdots$ が定まります. α_g が N で外部的なのは, $u_g \notin \mathbb{C}$ のときに他なりません.

たとえば, G をコンパクト Lie 群とし $G \subset U(M_n(\mathbb{C}))$ であるとします. そこでユニタリ表現 $u\colon G \to U(M_{n+1}(\mathbb{C}))$ を $u_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ とおけば, $u_g \in \mathbb{C}$ は $g = e$ のみであり, $\alpha_g = \mathrm{Ad}\,u_g \otimes \cdots$ は外部的作用となります (もっと強く極小作用であることを例 4.23 で証明します). こうしてつくる作用を**無限テンソル積型作用** (infinite tensor product type action) と呼び, 非自明な作用を作る重要な方法です.

問題 4.8. $\mathbb{Z}$ の von Nemann 環への作用で, 外部的作用ではないが接合積は factor になるものを構成せよ. その von Neumann 環は可換なもので取れるか?

無限テンソル積を導入したついでに, Powers factor を説明しておきます. $0 < \lambda < 1$ に対して, $R_\lambda := \bigotimes_1^\infty (M_2(\mathbb{C}), \phi_\lambda)$ とします. ここで状態 ϕ_λ は次のように定義します.

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{1+\lambda} \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x \right).$$

定理 4.9 (Powers)**.** R_λ は AFD III 型 factor であり, $\lambda \neq \mu$ ならば $R_\lambda \ncong R_\mu$.

Connes の III 型 factor の分類を使うと R_λ は III_λ 型であることが分かります. $0 < \lambda, \mu < 1$ が $\log \lambda / \log \mu \notin \mathbb{Q}$ をみたすとき, テンソル積 $R_\infty := R_\lambda \otimes R_\mu$ は AFD III_1 型因子環です. このノートではこれを**荒木-Woods factor** と呼びます.

4.2 ベルヌーイシフトによる構成

R を $\mathbb{C}$ でない factor, ϕ を R の忠実正則状態とし, $\mathbb{Z}$ 上の無限テンソル積 $M := \bigotimes_{\mathbb{Z}} (R, \phi)$, $\varphi := \bigotimes_{\mathbb{Z}} \phi$ を考え, そこで自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ を $\sigma((x_n)_n) = (x_{n-1})_n$ と定めます. すると σ は M 上の外部自己同型となります. これをチェックしてみましょう. これには次の性質 (mixing property) を理解することが大切です.

命題 4.10. 任意の $x, y \in M$ に対して, $\lim_{|n| \to \infty} \varphi(\sigma^n(x) y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

証明. まず $x, y \in \bigotimes_{-N}^N R$ のときは, $|n| > 2N+1$ ならば $\sigma^n(x) y$ は ϕ に関してテンソル積の形になっているので上の極限の式が成り立ちます. 残りは問題とします. □

問題 4.11. φ に関する条件付き期待値 $E_n\colon M \to \bigotimes_{-n}^{n} R$ を利用して, 前命題の証明をせよ.

さて σ^n $(n \neq 0)$ はユニタリ $u \in M$ によって, $\sigma^n = \operatorname{Ad} u$ と書けたと仮定します. Mixing property から $\lim_{m\to\infty} \varphi(\sigma^{mn}(u)u^*) = \varphi(u)\varphi(u^*)$ となるのですが, $\sigma^n(u) = uuu^* = u$ なので, $\varphi(u)\varphi(u^*) = 1$ となります. よって $u = \varphi(u) \in \mathbb{C}$ であり $\sigma^n = \mathrm{id}$ となりますが, $n = 0$ 以外ありえません. よって $\sigma \in \operatorname{Aut}(M)$ は $\mathbb{Z}$ の外部的作用を定めます. また mixing property はエルゴード性も導きます.

より一般に Γ を無限離散群として, Γ 上のテンソル積 $M = \bigotimes_{g\in\Gamma}(R, \phi)$ を考え, Γ の作用 σ_g を $\sigma_g((x_h)_h) := (x_{g^{-1}h})_h$ としてやると, この場合も mixing property をもち, Γ の M へのエルゴード的かつ外部的な作用を定めます. この作用を **(非可換) ベルヌーイシフト**と呼びます.

この構成をより一般化してみましょう. S を可算無限集合とし, $M := \bigotimes_{s\in S}(R, \phi)$ とします. 無限離散群 Γ が S に推移的に作用しているそこで $\sigma_g((x_s)_s) := (x_{g^{-1}s})_s$ と定めれば σ は Γ の M への作用となります.

問題 4.12. $\Gamma \curvearrowright S$ が次の性質を持つとする:

> 任意の有限部分集合 $F_1, F_2 \subset S$ に対して, ある $g \in \Gamma$ が $gF_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるように存在する.

このとき列 $g_n \in \Gamma$ が存在して, すべての $x, y \in M$ に対して $\lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma_{g_n}(x)y) = \varphi(x)\varphi(y)$ となることを示せ. $M^\sigma = \mathbb{C}$ も導け.

例えば作用 $\mathfrak{S}_\infty \curvearrowright \mathbb{N}$ は前問題の仮定をみたすので, $\mathfrak{S}_\infty \curvearrowright \bigotimes_1^\infty (R, \phi)$ はエルゴード的です.

4.3 無理数回転環による構成

§3.3 で考えた無理数回転環 A_θ を考えます. $M := \pi_\tau(A_\theta)''$ とすれば II_1 型 factor となるのでした. トレース τ の唯一性から各 $\alpha \in \operatorname{Aut}(A_\theta)$ は τ を不変にします. よって α の M への自然な拡張が得られます. この拡張も α と書くことにします. $\alpha_{(\gamma,\gamma')} \in \operatorname{Aut}(M)$ がいつ内部的かを考えることにしましょう.

命題 4.13. $\mu \neq 0$ とする. $(\gamma, \gamma') = (e^{i\lambda}, e^{i\mu})$ と書くとき, $\alpha_{(\gamma,\gamma')} \in \operatorname{Int}(M)$ であることの必要十分条件は $\lambda, \mu \in 2\pi\mathbb{Z} + 2\pi\theta\mathbb{Z}$ となることである.

証明. $(\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')}) := \{a \in M \mid ax = \alpha_{(\gamma,\gamma')}(x)a,\ \forall x \in M\}$ とおきます. M が factor なので, $\alpha_{(\gamma,\gamma')} \in \operatorname{Int}(M)$ ということと $(\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')}) \neq 0$ ということは同

値です．今 $(\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')}) \neq 0$ とし，0 でない元 a を取ってきます．$m, n \in \mathbb{Z}$ を $\tau(u^{-m}v^{-n}a) \neq 0$ となるように取ります．すると，

$$\tau(u^{-m}v^{-n}a)u^m v^n = u^m v^n \int_{\mathbb{T}^2} \alpha_{(z,z')}(u^{-m}v^{-n}a)\, dzdz' = \int_{\mathbb{T}^2} z^{-m}(z')^{-n}\alpha_{(z,z')}(a)\, dzdz'$$

ここで α は可換群 $\mathbb{T}^2$ の作用なので $(z, z') \in \mathbb{T}^2$ に対して，$\alpha_{(z,z')}(a) \in (\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')})$ であり，$(\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')})$ は強位相で閉じた空間なので，上の等式から $u^m v^n \in (\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')})$ が分かります（$(\mathrm{id}, \alpha_{(\gamma,\gamma')}) = \mathbb{C}u^m v^n$ も簡単に分かります）．

$\alpha_{(\gamma,\gamma')} = \mathrm{Ad}\, u^m v^n$ を生成元 u, v にかけてやると，$\gamma = e^{-2\pi n i\theta}, \gamma' = e^{2\pi m i\theta}$ となることが分かります．従って $\lambda = -2\pi n\theta,\ \mu = 2\pi m\theta \mod 2\pi$．よって $\lambda, \mu \in 2\pi\mathbb{Z} + 2\pi\theta\mathbb{Z}$．逆は議論を遡れば明らか． □

$\mathbb{R}$ の M への作用 $\beta_t := \alpha_{(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})}$ を考えます．

命題 4.14. β が外部的作用であるためには，$\lambda, \mu \neq 0$ かつ $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ かつ $\lambda/\mu \notin GL_2(\mathbb{Q})\theta$ であることが必要十分である．

証明. β が外部的作用であると仮定します．もし $\lambda = 0, \mu \neq 0$ であると，β は周期 $2\pi/\mu$ をもつので不適です．よって $\lambda, \mu \neq 0$ でなくてはなりません．次に $n, m \in \mathbb{Z}$ として $\lambda/\mu = n/m \in \mathbb{Q}$ と表せたと仮定します．すると容易に β は周期 $2\pi m/\mu$ をもつことが分かるので不適です．さらに $\lambda/\mu = (a\theta + b)/(c\theta + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad - bc \neq 0$ と表せたとします．$T := 2\pi(c\theta + d)/\mu$ とすると，$\lambda T = 2\pi b + 2\pi a\theta$, $\mu T = 2\pi d + 2\pi c\theta$ となり，前の命題から β_T が内部的となるので不適です．逆はこの議論を遡れば分かります． □

$\lambda/\mu \ni \mathbb{Q}$ の仮定は埋め込み $\mathbb{R} \ni t \mapsto (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) \in \mathbb{T}^2$ が稠密な値域をもつことを意味します．特に $M^\beta = M^\alpha = \mathbb{C}$ となり，β は $\mathbb{R}$ の外部的なエルゴード作用であることが分かります．

問題 4.15. β を上記のものとする．$\Gamma(\beta) = \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は $\lambda, \mu \neq 0$ かつ $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ であることを示せ．ここで $\Gamma(\beta)$ は β の Connes スペクトル．

この例では，外部的ならば $\Gamma(\beta) = \mathbb{R}$ が従いますが，一般的にはいつも正しいわけではありません．

問題 4.16. Cuntz 環に適当に $\mathbb{R}$ 作用を考えていろいろ考察してみよ．

4.4 極小作用，強外部的作用

外部的作用にはいくつか種類があるので，まとめておきます．

定義 4.17. α を局所コンパクト群 G の factor M への作用とします．

(1). α が**極小** (minimal) であるとは, 次の 2 条件をみたすことである.

- $(M^\alpha)' \cap M = \mathbb{C}$
- α は忠実である, つまり $\alpha_g = \mathrm{id}$ なら $g = e$.

(2). α が**強外部的** (strongly outer) であるとは, $\pi_\alpha(M)' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}$ となることである.

I 型 factor には極小作用は存在しないことに注意してください. 実際 M が I 型 factor であれば, double commutant theorem から $M^\alpha = ((M^\alpha)' \cap M)' \cap M = M$ とりますが, これは α が自明な作用であることを意味します. よって G が非自明な群であれば, M は II 型か III 型です.

補題 4.18. 極小 $\Rightarrow$ 強外部的 $\Rightarrow$ 外部的.

証明. α が極小であるとします. このとき $\pi_\alpha(M^\alpha) = M^\alpha \otimes \mathbb{C}$ であることから, $\pi_\alpha(M)' \cap (M \rtimes_\alpha G) \subset \mathbb{C} \otimes B(L^2(G))$ が分かります. 竹崎の定理から $M \rtimes_\alpha G = (M \otimes B(L^2(G))^{\alpha \otimes \mathrm{Ad}\,\rho}$ なので, $\pi_\alpha(M)' \cap (M \rtimes_\alpha G) \subset \mathbb{C} \otimes L(G)$ まで分かります. 今 $\omega \in M_*$, $x \in M$ とすると, $(\omega \otimes \mathrm{id})(\pi_\alpha(x)) \in C_b(G)$ と見なせます. 実際これは $G \ni g \mapsto \omega(\alpha_{g^{-1}}(x))$ という関数です. 次の問題の結果から ω, x を動かしたときこれらは $L^\infty(G)$ を生成します. $L^\infty(G) \cap L(G) = \mathbb{C}$ なので, $\pi_\alpha(M)' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}$ が分かりました.

次に α を強外部的として, ある $g \in G$ と $U \in U(M)$ で $\alpha_g = \mathrm{Ad}\,U \in \mathrm{Int}(M)$ と書けたとします. すると容易に $\pi_\alpha(U)^* \lambda_g^\alpha \in \pi_\alpha(M)' \cap (M \rtimes_\alpha G) = \mathbb{C}$, よって $\pi_\alpha(U) \in \mathbb{C}\lambda_g^\alpha$. こうなるのは $g = e$ 以外ありえません (なぜでしょうか). $\square$

問題 4.19. α が忠実であることと $\{(\omega \otimes \mathrm{id})(\pi_\alpha(x)) \mid \omega \in M_*, x \in M\}$ が弱位相で稠密な $L^\infty(G)$ の部分環を生成することとは同値であることを示せ.

問題 4.20. G が離散的ならば, 強外部的 $\Leftrightarrow$ 外部的.

命題 4.21. G がコンパクトであれば, 極小 $\Leftrightarrow$ 強外部的.

証明. G がコンパクトなので平均 $E_\alpha := \int_G \alpha_g \, dg$ は M から M^α へのノルム 1 射影を定義します. M^α の忠実正則状態 ψ を用意して, $\varphi := \psi \circ E_\alpha$ とおけば, φ は α 不変です. 対応する GNS 巡回ベクトルを ξ_φ, GNS Hilbert 空間を H_φ と書きます. すると $U_g x\xi_\varphi = \alpha_g(x)\xi_\varphi$, $x \in M$ とすることで, ユニタリ表現 $U \colon G \to B(H_\varphi)$ が定まります.

少々申し訳ないのですが, ここから標準型の理論を使います. J を φ に付随するモジュラー共役作用素とすると, $M' = JMJ$ と $JU_g = U_g J$ となります.

さて α が強外部的であったとします. $M_1 := M \vee \{U_g\}_g''$ とおけば, §3.5 の議論から $\pi_\alpha(M) \subset M \rtimes_\alpha G$ と $M \subset M_1$ は同型な包含です ($M \rtimes_\alpha G$ は factor である

から). よって $M'\cap M_1=\mathbb{C}$. ところで $M^\alpha=M\cap\{U_g\}'$ だから $J(M^\alpha)'J=M_1$ となります. よって $J((M^\alpha)'\cap M)J=M_1\cap M'=\mathbb{C}$ が分かりました.

α の忠実性は, $\alpha_g=\mathrm{id}$ ならば $\lambda_g^\alpha\in\pi_\alpha(M)'\cap(M\rtimes_\alpha G)$ という事実に注意すればよい. □

したがって特に有限群なら, 極小性, 強外部性, 外部性は同値な概念です. 一般の連続群では同値ではありません (例 4.26, 7.2 参照).

問題 4.22. G をコンパクト群として, $G\overset{\alpha}{\curvearrowright}M$ を極小作用とする. N を factor とすれば, 任意の作用 $G\overset{\beta}{\curvearrowright}N$ に対して, $\alpha\otimes\beta$ は極小であることを示せ.

4.5 コンパクト群の極小作用の例

いくつか例をあげてみたいと思います.

例 4.23. G をコンパクト Lie 群とし, $G\subset U(N)$ としておきます. 今 $M_{N+1}(\mathbb{C})$ にユニタリ表現 $u_g:=\begin{pmatrix}1&0\\0&g\end{pmatrix}$ を構成して, 無限テンソル積 $M:=\bigotimes_1^\infty(M_{N+1}(\mathbb{C}),\mathrm{tr})$ 上に作用 $\alpha_g:=\bigotimes_1^\infty\mathrm{Ad}\,u_g$ を作ります. §4.1 でも見たように, α は外部的作用です. もっと強く α が極小的であることを示します. それには §4.2 で述べた, テンソルの入れ替えによる作用 $\mathfrak{S}_\infty\overset{\sigma}{\curvearrowright}M$ を利用します. $g\in\mathfrak{S}_m$ に対して, m 回テンソル積 Hilbert 空間 $H_m:=\mathbb{C}^{N+1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^{N+1}$ の入れ替えはユニタリ $w_g\in B(H_m)=\bigotimes_1^m M_{N+1}(\mathbb{C})$ によって行えます. もちろん w_g は $\mathfrak{S}_m$ のユニタリ表現です. そこで等式 $w_g(u_g\otimes\cdots u_g)w_g^*=u_g\otimes\cdots u_g$ により, $w_g\in M^\alpha$ であることが分かります. よって $(M^\alpha)'\cap M\subset\{w_g\}'_{g\in\mathfrak{S}_\infty}\cap M$ です. ここで $\sigma_g=\mathrm{Ad}\,w_g$ に気を付ければ, $\{w_g\}'_{g\in\mathfrak{S}_\infty}\cap M=M^\sigma$ となります. しかし, Mixing property によって $M^\sigma=\mathbb{C}$ なのでした. よって $(M^\alpha)'\cap M=\mathbb{C}$ が言えました.

問題 4.24. 上の例において $N:=\{w_g\mid g\in\mathfrak{S}_\infty\}''$ とおくと, N は II_1 型 factor であることを示せ. さらにそのトレース τ について $\tau(w_g)$ を計算せよ. Hint: $g\in\mathfrak{S}_N$ をサイクル表示して考えてみよ.

Lie 群とは限らない一般のコンパクト群についても同様の構成法を行えます.

問題 4.25. $\{1,\pi_1,\pi_2,\dots\}$ をコンパクト群 G の既約表現の完全リストとし, 各 π_n に対して, $M_n:=\bigotimes_{k=1}^\infty(B(\mathbb{C}\oplus H_{\pi_n}),\mathrm{tr})$, $\alpha_g^n:=\bigotimes_1^\infty\mathrm{Ad}\,(1\oplus\pi_n(g))$ と定める. 次に $M:=\bigotimes_{n=1}^\infty(M_n,\mathrm{tr})$, $\alpha_g:=\bigotimes_1^\infty\alpha_g^n$ とすると, α は G の II_1 型 factor M への極小作用となることを示せ.

コンパクト群 G に埋め込まれた局所コンパクト群 G_1 に対して, G の極小作用 α を G_1 に制限すれば極小であることは明らかです. たとえば, $\lambda/\mu\notin\mathbb{Q}$ と

し, $\mathbb{R} \notin t \mapsto (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) \in \mathbb{T}^2$ という埋め込みを考えて, $\mathbb{T}^2$ の極小作用 $\alpha_{(\gamma,\gamma')} := \bigotimes_1^\infty \mathrm{Ad}\,(1 \oplus \gamma \oplus \gamma')$ を制限すると, $\mathbb{R}$ の II_1 型 factor への極小作用が構成されます. 具体的には $\alpha_t := \bigotimes_1^\infty \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\mu t} \end{pmatrix}$ です.

例 4.26. §4.3 で構成した $\mathbb{R} \overset{\beta}{\curvearrowright} M$ はエルゴード的ですので極小的ではありませんが, 強外部的であることを示しましょう.

$\pi_\beta(M)' \cap (M \rtimes_\beta \mathbb{R})$ の計算は一般には大変やっかいです. $\mathbb{T}^2$ の作用 α を使って賢く求めることにしましょう. $M \rtimes_\beta \mathbb{R} = (M \otimes B(L^2(\mathbb{R}))^{\beta \otimes \mathrm{Ad}\,\rho}$ であることを思い出しましょう. β と $\mathbb{T}^2$ 作用 α が交換することから, $\alpha \otimes \mathrm{id}$ を $\pi_\beta(M)$ と $M \rtimes_\beta \mathbb{R}$ に制限することができます. とくに $R := \pi_\beta(M)' \cap M \otimes_\beta \mathbb{R}$ 上にも制限できます. 非零な $x \in R$ を $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ に対応するスペクトルをもつものとします. つまり $(\alpha_{(\gamma,\gamma')} \otimes \mathrm{id})(x) = \gamma^m {\gamma'}^n x$ です. するともちろん $x \in \mathbb{C}u^m v^n \otimes B(L^2(\mathbb{R}))$ でなくてはなりません. よって $x = u^m v^n \otimes y$ と書けます. $x \in M \otimes_\beta \mathbb{R}$ より $\mathrm{Ad}\,\rho_t(y) = e^{-im\lambda t} e^{-in\mu t} y$ を満たします.

ここで $e_\lambda \in C_b(\mathbb{R})$ を $e_\lambda(t) := e^{-i\lambda t}$ と定めます. すると $\mathrm{Ad}\,\rho_t(e_\lambda^m) = e^{-im\lambda t}$, $\mathrm{Ad}\,\rho_t(e_\mu^n) = e^{-in\mu t}$ となりますので, $\mathrm{Ad}\,\rho_t(e_\lambda^{-m} e_\mu^{-n} y) = e_\lambda^{-m} e_\mu^{-n} y$ が任意の $t \in \mathbb{R}$ で成り立ちます. よって $z := e_\lambda^{-m} e_\mu^{-n} y \in L(\mathbb{R})$ です. まとめると, $x = (u^m v^n \otimes e_\lambda^m e_\mu^n)(1 \otimes z)$ です. これをさらに関係式

$$\pi_\beta(u) = u \otimes e_\lambda, \quad \pi_\beta(v) = v \otimes e_\mu$$

をつかって $x = \pi_\beta(u^m v^n)(1 \otimes z)$ と書き直します. $\pi_\beta(u) x \pi_\beta(u^*) = x = \pi_\beta(v) x \pi_\beta(v^*)$ から, $\pi_\beta(u)(1 \otimes z)\pi_\beta(u^*) = e^{-2\pi i n\theta}(1 \otimes z)$, $\pi_\beta(v)(1 \otimes z)\pi_\beta(v^*) = e^{2\pi i m\theta}(1 \otimes z)$ がいえます. これは上の関係式を使うと, $e_\lambda z e_\lambda^* = e^{-2\pi i n\theta} z$, $e_\mu z e_\mu^* = e^{2\pi i m\theta} z$ とまとまります.

よって $g \in \lambda\mathbb{Z} + \mu\mathbb{Z}$ に対して $e_g z e_g^* = f(g) z$ となるように絶対値 1 の数 $f(g)$ が定まります. 具体的には $f(k\lambda + \ell\mu) = e^{2\pi i(-kn + \ell m)}$ です. z は非零であり, $e_g z e_g^*$ が g について強連続なことから, f は実数群 $\mathbb{R}$ 上の連続関数に拡張します. もちろん $f(s+t) = f(s)f(t)$ ですから, ある $p \in \mathbb{R}$ によって $f(s) = e^{ips}$ と書けます. すると $e^{ip\lambda} = e^{-2\pi i n\theta}$, $e^{ip\mu} = e^{2\pi i m\theta}$ ですが, これは $p \neq 0$ では $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}$ か $\lambda/\mu \in GL_2(\mathbb{Q})\theta$ を意味しますから λ, μ の取り方に矛盾します.

よって $p = 0$. これは $m, n = 0$ を導きます. それゆえ z は e_λ, e_μ と交換しますが, これらで $L^\infty(\mathbb{R})$ を生成しますから, $z \in L(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})' = \mathbb{C}$. ゆえに $x = 1 \otimes z \in \mathbb{C}$.

少し違った趣の例として次のものがあります.

例 4.27. M を III_1 型 factor, φ を支配的荷重とすると, $\mathbb{R}$ 作用 σ^φ は極小である. これは Connes-竹崎の相対可換子環定理から従います [14].

まとめ 4.28. 外部性にもいろいろ強弱がある. それらが同じ強さかどうかは, 群の形に依存している.

5 コンパクト群の極小作用

5.1 極小作用の種々の安定性

まず (1 次) コサイクルとは何かを説明します. α を局所コンパクト群 G の M への作用とします. 強連続写像 $u\colon G \to U(M)$ が与えられたとし, $\beta_g := \mathrm{Ad}\, u_g \circ \alpha_g$ と写像を定めた場合, いつ作用となるでしょうか. 計算 $\beta_g\beta_h = \mathrm{Ad}\, u_g\alpha_g(u_h) \circ \alpha_{gh}$, $\beta_{gh} = \mathrm{Ad}\, u_{gh} \circ \alpha_{gh}$ から β が作用となる必要十分条件は $c_{g,h} := u_g\alpha_g(u_h)u_{gh}^*$ が M の中心に入ることであると分かります. 特に $c = 1$ なら β は作用となります. この場合 u は α **コサイクル**と呼ばれます. つまり $u_{gh} = u_g\alpha_g(u_h)$ を満たすものです. β を α^v と書き, α の v による**コサイクル摂動**といいます.

ついでに共役性, コサイクル共役性についてもここで触れておきます. 2 つの作用 $G \overset{\alpha,\beta}{\curvearrowright} M$ が**共役** (conjugate) とは, ある $\theta \in \mathrm{Aut}(M)$ が, $\alpha_g = \theta \circ \beta_g \circ \theta^{-1}$ となるように存在することをいいます. 次に**コサイクル共役** (cocycle conjugate) とは, β のあるコサイクル摂動 β^v と α が共役となることをいいます.

共役で分類する方が格好いいと思いますが, 実際にはコサイクル共役での分類の方が自然です. 重要な対象である接合積を変えないこと (命題 5.5), また中心列環への同じ作用を与えることなどがその理由としてあげられると思います. ですから「群作用を分類する」といえば, コサイクル共役で同じかどうかを判定する完全不変量を構成したいのだな, と理解してください.

例 5.1 (コサイクル共役だが共役ではない作用)**.** 無限テンソル積環 $M_m = \bigotimes_{n=-\infty}^{\infty}(M_m(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$ において, $\alpha^{(m)}$ を一斉に左に 1 つだけテンソル積成分をずらす同型とします. $\alpha^{(m)}$ は $\mathbb{Z}$ の作用として外部的です. 今 $m_1 \neq m_2$ であるとします. M_{m_1}, M_{m_2} は AFD II_1 型 factor なので同型です. Connes の定理 ([14] 参照) によれば, $\mathbb{Z}$ の AFD II_1 型 factor への外部作用はコサイクル共役の意味で一意的ですから, $\alpha^{(m_1)}$ と $\alpha^{(m_2)}$ はコサイクル共役です.

しかし Connes-Størmer のエントロピー $H(\alpha^{(m)})$ は $\log m$ に等しく, $\alpha^{(m_1)}$ と $\alpha^{(m_2)}$ は共役ではありません [3].

さて, 話をコサイクル摂動による安定性に戻しましょう.

例 5.2. $u\colon G \to B(H)$ をユニタリ表現とする. $B(H)$ に G の自明作用を考えると, u はこの作用のコサイクルとなる.

次の結果は全く単純なものですが, 結構応用できます.

例 5.3. α を G の M への作用, $u\colon G \to U(M^\alpha)$ をユニタリ表現とすると, u は α コサイクル.

例 5.4. φ, ψ を M 上の忠実半正則正則荷重とすると, Connes コサイクル $[D\varphi : D\psi]_t$ が定まる. これはモジュラー自己同型による $\mathbb{R}$ 作用 σ^ψ のコサイクルである.

さて引き続き局所コンパクト群 G の factor M への作用 α を考えます. 接合積 $M \rtimes_\alpha G$ のコサイクル摂動による安定性を見ておきます.

命題 5.5. 包含 $\pi_\alpha(M) \subset M \rtimes_\alpha G$ と $\pi_{\alpha^v}(M) \subset M \rtimes_{\alpha^v} G$ には自然な同型がある.

したがって

系 5.6. 強外部性はコサイクル摂動で安定的な性質である.

一般の局所コンパクト群では極小作用は安定的ではありませんが, コンパクト群の場合は安定的です. それは極小性と強外部性が同値であったからです. まとめておくと,

定理 5.7. コンパクト群の作用の極小性はコサイクル摂動で安定的な性質である.

次に $e \in M^\alpha$ を射影として, $M_e := eMe$ に α を制限してできる作用 α^e について考えましょう.

命題 5.8. 局所コンパクト群 G の作用 α が極小的 (強外部的) ならば, α^e も極小的 (強外部的) である.

問題 5.9. G をコンパクト群, M を von Neumann 環とし, 作用 $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を考える. このとき M^α は $M \rtimes_\alpha G$ のコーナーであることを示せ. Hint: $e_G\colon L^2(G) \to \mathbb{C}1_G$ を利用せよ.

問題 5.10. G をコンパクト群, M を von Neumann 環とし, 作用 $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を考える. もし $M \rtimes_\alpha G$ が factor ならば, α は忠実であることを示せ.

5.2 1 次コサイクル消滅定理

定理 5.11. コンパクト群 G の von Neumann 環 M への作用 α を考え, v を α コサイクルとする. もし次のいずれかが成り立つならば, v はコバウンダリである.

- $M \rtimes_\alpha G$ は factor かつ M は有限型 von Neumann 環である.
- $M \rtimes_\alpha G$ は factor かつ M^α は III 型 factor である.

証明. Connes の 2×2 行列トリックを使います (コンパクト群の作用については A. Wassermann の論文 [16] にまとまっています). $N := M \otimes M_2(\mathbb{C})$, $\bar{\alpha}_g := \alpha_g \otimes \mathrm{id}$ とします. もちろん $\bar{\alpha}$ は極小作用. ここで $u_t := 1 \otimes e_{11} + v_t \otimes e_{22}$ とおけば, これは $\bar{\alpha}$ コサイクル. 極小作用はコサイクル摂動しても極小であったから, $\beta := \bar{\alpha}^u$ も極小作用となる. あとは固定点環 N^β の中で e_{11} と e_{22} が同値であることを示せば十分. 実際 $1 \otimes e_{11} = a^*a$, $1 \otimes e_{22} = aa^*$ となる $a \in N^\beta$ を取れたとすると, $a = (1 \otimes e_{22})a(1 \otimes e_{11})$ なので, $a = u \otimes e_{21}$ という形をしており, u はユニタリである. 一方 $\beta_g(a) = a$ より, $v_g \alpha_g(u) = u$. よって v はコバウンダリであることが分かる.

(1). M が有限型 von Neumann 環の場合. N は II_1 型 factor となることを見ましょう. 接合積はコサイクル摂動で安定的に振る舞うから, $N \rtimes_\beta G \cong (M \otimes M_2(\mathbb{C})) \rtimes_{\alpha \otimes \mathrm{id}} G = (M \rtimes_\alpha G) \otimes M_2(\mathbb{C})$ であり, これは factor です. N^β は $N \rtimes_\beta G$ のコーナーであること (問題 5.9) を思い出すと仮定から factor であることが分かります. N は有限トレースをもつから, N^β は有限型 factor でそのトレースは $\tau_M \otimes \mathrm{tr}$ の制限で与えられます (τ_M は M の忠実正則トレース状態ならば何でもよい). もちろん $(\tau_M \otimes \mathrm{tr})(e_{11}) = 1/2 = (\tau_M \otimes \mathrm{tr})(e_{22})$ だから, e_{11} は e_{22} に N^β の中で同値となります.

(2). M^α が III 型 factor の場合. $M \rtimes_\alpha G$ も III 型となる. これを見るには, M^α が $M \rtimes_\alpha G$ のコーナーであることを思い出すか, §3.5 でやった同型 $M \rtimes_\alpha G \cong J(M^\alpha)'J$ を見れば分かります. すると (1) と同じように $N \rtimes_\beta G$ が III 型 factor であることが従い, よってそのコーナーの N^β は III 型 factor であることが分かる. それゆえ $1 \otimes e_{11} \sim 1 \otimes e_{22}$ が N^β でいえる. □

別証明. G が有限群のときを考えます. $M \rtimes_\alpha G$ の中で, $\pi_\alpha(v_g)\lambda^\alpha(g)$ はユニタリ表現となるから, その平均 $p := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \pi_\alpha(v_g)\lambda^\alpha(g)$ は射影となります. 射影 e_G を思い出しましょう. $e_G := |G|^{-1} \sum_{g \in G} \lambda^\alpha(g)$ と与えられたのでした. $p \sim e_G$ であることを示せば OK です.

実際そうだとすると $a \in M \rtimes_\alpha G$ で $e_G = a^*a$, $p = aa^*$ となります. $a = ae_G$ ですが, $\lambda^\alpha(g)e_G = e_G$ に気をつけると, $a = ae_G = \sum_g a_g \lambda^\alpha(g) e_G = (\sum_g a_g) e_G$ がいえます. $w := (\sum_g a_g) \in M$ とおくと, $e_G = a^*a = e_G w^* w e_G = E_\alpha(w^*w)e_G$, $p = we_G w^*$ となります. ここで $E \colon M \rtimes_\alpha G \to M$ を $E(\sum_g \pi_\alpha(x_g)\lambda^\alpha(g)) = x_e$ で定まるノルム 1 の射影とすると, $E(e_G) = |G|^{-1} = E(p)$ だから,

$$|G|^{-1} = E(e_G) = E(E_\alpha(w^*w)e_G) = E_\alpha(w^*w)|G|^{-1},$$

$$|G|^{-1} = E(p) = E(we_G w^*) = wE(e_G)w^* = |G|^{-1}ww^*.$$

よって w は $E_\alpha(w^*w) = 1 = ww^*$. とくに $\|w\| = 1$ であるから, $w^*w \leq 1$. すると $E_\alpha(1 - w^*w) = 0$ となり, E_α の忠実性から $w^*w = 1$. つまり w はユニタリとなり

ます. 最後に

$$|G|^{-1}\sum_g \pi_\alpha(v_g)\lambda^\alpha(g)=p=we_Gw^*=|G|^{-1}\sum_g \pi_\alpha(w\alpha_g(w^*))\lambda^\alpha(g)$$

から, $v_g=w\alpha_g(w^*)$ が従います.

(1). M が II_1 型のとき. $M\rtimes_\alpha G$ は (双対状態) $\tilde{\tau}(\sum_g x_g\lambda^\alpha(g))=\tau(x_e)$ が忠実正則トレース状態を与えるので, II_1 型 factor となる. $\tilde{\tau}(p)=|G|^{-1}=\tilde{\tau}(e_G)$ より $p\sim e_G$.

(2). M が II_∞ 型のとき. $\tau\circ\alpha_g=\tau$ より, $\tilde{\tau}(\sum_g x_g\lambda^\alpha(g))=\tau(x_e)$ が忠実正則トレース荷重を与える. そして $\tilde{\tau}(p)=\infty=\tilde{\tau}(e_G)$ より $p\sim e_G$.

(3). M が III 型のとき. 条件付き期待値 $E\colon M\rtimes_\alpha G\to M$ の存在から $M\rtimes_\alpha G$ は III 型 (下記問題参照). よって $p\sim e_G$. □

問題 5.12. $N\subset M$ を von Neumann 環の包含とし, $E\colon M\to N$ を忠実正則な条件付き期待値とする. もし N が III 型ならば, M も III 型であることを示せ.

例 5.13. M が III 型 factor, α がコンパクト群 G の M への極小作用とする. M^α が II 型のときは, 1 次コホモロジーは消滅するとは限りません.

例えば M を III_λ 型 factor, φ を周期的状態とする (周期は $T:=-2\pi/\log\lambda$). すると σ^φ は $\mathbb{T}:=\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ の極小作用を定め, $M^{\sigma^\varphi}=M_\varphi$ は II_1 型 factor となります. ψ を周期的荷重としましょう ($\psi(1)=\infty$). 必要ならば ψ に正数をかけて $[D\psi:D\varphi]_T=1$ とできます. すると $[D\psi:D\varphi]_t$ は $\mathbb{T}$ の作用 σ^φ のコサイクルとなります. これがコバウンダリだと仮定すると, $\psi=w\varphi w^*$ となるユニタリ $w\in M$ が存在しますが, $\psi(1)=\varphi(w^*w)=1$ となり矛盾します.

ちなみに M^α と M の型の分類は次のようになります [7, Proposition 5.2].

問題 5.14. コンパクト群 G の極小作用 $G\overset{\alpha}{\curvearrowright}M$ が与えられたとする. このとき M^α と M の型は次のリストのうちどれかとなる.

- M が II_1 型ならば, M^α も II_1 型.
- M が II_∞ 型ならば, M^α は II_∞ 型. このとき, $\alpha\cong\alpha^0\otimes\mathrm{id}_{B(\ell^2)}$, ここで α^0 は II_1 型 factor への極小作用.
- M は III_0 型 iff M^α は III_0 型.
- M が III_λ 型 $(0<\lambda\leq 1)$ のとき, M^α が II 型となるための必要十分条件は $\{\sigma_t^{\phi\circ E_\alpha}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が $\alpha(G)$ の中心部分群に属することである. ここで ϕ は M^α のある忠実正則状態.

6 コンパクト群の極小作用の分類

6.1 コンパクト群から「双対群」へ

M を II_1 型 factor とし, コンパクト可換群 G の極小作用 $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を考えましょう. $\hat{G}$ を双対群とします ($\hat{G}$ には離散位相を考える). $g \in G$ と $p \in \hat{G}$ の pairing は $\langle p, g\rangle$ と書くことにします. $p \in \hat{G}$ に対応するスペクトル部分空間 M_p を次のように定めます:

$$M_p := \{x \in M \mid \alpha_g(x) = \langle p, g\rangle x,\ \forall g \in G\}.$$

α は忠実だから, M_p たちは強位相で稠密な M の部分環を張ります.

$0 \neq x \in M_p$ とします. x の極分解を $x = v|x|$ とすれば, $|x| \in M^\alpha$ であり, $v = \lim_{\varepsilon\to 0} x(\varepsilon + |x|)^{-1}$(強収束) だから, $v \in M_p$ です. つまり M_p は非零な部分等距離作用素を含みます. 実際には M_p がユニタリを含むことを 2 通りの方法で証明しましょう.

(I). Maximal argument による方法. M の部分等距離作用素のなす集合を $\mathrm{PI}(M)$ と書きます. そこで $\mathscr{G} := M_p \cap \mathrm{PI}(M)$ と定めます.

問題 6.1. $\mathrm{PI}(M)$ に $v_1 \preceq v_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2 v_1^* v_1$ とすると, これは順序関係になることを示せ. また $\mathscr{G}$ はこの順序で帰納的であることを示せ.

Zorn の補題から $\mathscr{G}$ の極大元 v を取れます. これがユニタリであることを示します. $e := 1 - v^*v$, $f := 1 - vv^*$ とします. $e \neq 0$ と仮定します. このとき M は有限型ですから $f \neq 0$ です. $e, f \in M^\alpha$ であることと, M^α のトレースは M のトレースを制限したものであることから, $e \sim f$ が M^α でいえます. $w \in M^\alpha$ を $w^*w = e$, $ww^* = f$ となるように取ります.

次に M_e 上に縮小作用 α^e を考えると, 問題 5.8 からこれは極小的です. よって $0 \neq u \in M_p \cap \mathrm{PI}(M_e)$ を取れます. そこで $v' := v + wu$ とおくと, 明らかに $v \neq v'$ かつ $v \preceq v'$. これは矛盾. したがって $v^*v = 1$. M は有限型なので $vv^* = 1$ である.

(II). 1 次コホモロジー消滅定理を使う方法. $G \ni g \mapsto \langle p, g\rangle \in \mathbb{T}$ を M^α へのユニタリ表現と見なすと, 自明なことですが, 例 5.3 で注意したとおり α コサイクルです. 今 M が II_1 型だから, コバウンダリです. よってある $v \in U(M)$ が, $v^*\alpha_g(v) = \langle p, g\rangle$ となるように存在する.

ちなみに, M^α が II 型, M が III 型のケースでは, 一般に極大元 v は等距離作用素か余等距離作用素まではできます (cf. III_λ 型の離散分解).

各 M_p からユニタリ v_p を取ってきましょう. $p = 0$ では $v_0 = 1$ とします. v_p の取り方には M^α のユニタリの分だけあいまいさがあることは心に留めておきましょう. さて, ここで $\beta_p(x) = v_p x v_p^*$ と定めると, M^α を大局的に不変にすることが分かります.

では $\{\beta_p\}_p$ は作用なのでしょうか? 残念ながら必ずしもそうではありません. 実際に $c_{p,q} := v_p v_q v_{p+q}^* \in M^\alpha$ と定めると,

$$\beta_p \circ \beta_q = \operatorname{Ad} c_{p,q} \circ \beta_{p+q}, \quad c_{p,q} c_{p+q,r} = \beta_p(c_{q,r}) c_{p,q+r}$$

が成り立つことが分かります. このような「作用もどき」(β, c) を**コサイクル作用**と呼びます.

問題 6.2. α の極小性は, コサイクル作用 (β, c) が外部的であることとは同値であることを示せ. ここで (β, c) の外部性は, $p \neq 0$ のとき $\beta_p \notin \operatorname{Int}(M^\alpha)$ を意味する.

これまでは可換な G を考えてきましたが, Kac 環を用いれば, 非可換な G についても同様の議論ができます.

まとめ 6.3. コンパクト群の極小作用を研究することと, 「双対群」(非可換のときは群ではない) の外部的コサイクル作用を研究することは等価である.

Connes の結果以降, 多くの人が群作用の分類を研究した結果, 外部的 (コサイクル) 作用を分類する手法が段々と洗練されてきました. その方針を以下にまとめておきましょう.

(1) Rohlin 性をもつことを示す (§6.3 参照).

(2) 評価付きの 2 次コホモロジー消滅定理を示す.

(3) 評価付きの 1 次コホモロジー消滅定理を示す.

(4) コサイクル摂動近似定理を示す.

(5) Evans-岸本の議論を使う.

この手法の詳細は論説に書いておいたので, ここでは Rohlin 性についての簡単な説明に留めておきたいと思います.

6.2 超積環

Von Neumann 環 N に対して,

$$\ell^\infty(N) := \{(x^1, x^2, \dots) \mid x_i \in N,\ \sup_\nu \|x^\nu\| < \infty\}$$

と定めると, ノルム $\|(x^\nu)_\nu\| := \sup_\nu \|x^\nu\|$ により C* 環となります (実際には von Neumann 環). 次に非単項超フィルター $\omega \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ に対して,

$$T_\omega := \{(x^\nu)_\nu \in \ell^\infty(N) \mid x^\nu \xrightarrow{\text{strong*}} 0 \text{ as } \nu \to \omega\},$$

$$C_\omega := \{(x^\nu)_\nu \in \ell^\infty(N) \mid \|[\varphi, x^\nu]\|_{N_*} \to 0 \text{ as } \nu \to \omega,\ \forall \varphi \in N_*\}$$

と定めます. ここで $[\varphi, x](y) := \varphi(xy - yx)$ です. N が忠実正則トレース状態 τ をもつときは, $(x^\nu)_\nu \in T_\omega \Leftrightarrow \lim_{\nu\to\omega} \|x^\nu\|_2 = 0$, そして $(x^\nu)_\nu \in C_\omega \Leftrightarrow \lim_{\nu\to\omega} \|[x^\nu, y]\|_2 = 0\ \forall y \in N$ となります ($\|x\|_2 := \tau(x^*x)^{1/2}$). C_ω の元を ω **中心列**とか単に中心列と呼びます. すると, T_ω, C_ω は C* 環であり, T_ω は C_ω の閉イデアルです. そこで商 C* 環 $M_\omega := C_\omega/T_\omega$ を考え, これを N の**中心列環**と呼びます.

各 $\varphi\imath N_*$ は M_ω にノルム有界汎関数 φ_ω を, $\varphi_\omega((x^\nu)_\nu) := \lim_{\nu\to\omega} \varphi(x^\nu)$ で定めます. もしも φ が忠実正則状態ならば, φ_ω は忠実トレース状態であることが分かります.

命題 6.4 (境, McDuff, Connes, Ocneanu)**.** $\varphi \in N_*$ を忠実正則状態とすると, N_ω のノルム単位球は $\|\cdot\|_{\varphi_\omega}$ のノルムで完備である. とくに N_ω は有限型 von Neumann 環である. ここで状態 ϕ に対して, $\|x\|_\phi := \phi(x^*x)^{1/2}$ という記法を用いた.

M_ω を考える必然性というのは, たとえば次のような事柄に対処するために出てきます. $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ が近似的に内部的であったとしましょう. 定義からユニタリの列 u^ν が取れて, $\alpha = \lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Ad}\, u^\nu$ です. この u^ν の取り方は存在から出てくるもので, 大抵は望ましい性質をもっていません. そこで別の v^ν で $\alpha = \lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Ad}\, v^\nu$ となるいいものに取り換えたいことがしばしばあります. u^ν と v^ν の違いである $v^\nu(u^\nu)^*$ が中心列を定めます. さらにこれを列として見るのではなく, その無限大に行った姿 (有理数から実数へ, のような感じ) を作用素環でとらえるために M_ω を考察する必要があるのです. これにはさらに「M の自己同型がどのように M_ω に作用するのか?」という根本的な問題は解決しなくてはなりません. (これは M に応じてケースバイケースの問題です). ですから, 群の外部作用の分類は「M_ω に外部的に作用するとして」という仮定が設けられます.

少し先走ってしまいましたが, M の自己同型 α は $(x^\nu)_\nu \mapsto (\alpha(x^\nu))_\nu$ と定めることで, M_ω の自己同型を定めます. これを普通は α_ω と書きますが, $(\alpha_\omega)_g$ と書くのは面倒くさいので単に α とも書くことにします.

明らかに $\mathrm{Aut}(M) \ni \alpha \mapsto \alpha_\omega \in \mathrm{Aut}(M_\omega)$ は群の準同型ですが, おうおうにして**連続でないかもしれない**ことに注意してください (もちろん M が full factor のときは連続ですね!).

定理 6.5 (Connes)**.** M が AFD II 型 factor であれば, 次が成り立つ.

$$\alpha \in \mathrm{Int}(M) \Leftrightarrow \alpha_\omega = \mathrm{id} \Leftrightarrow \alpha_\omega \in \mathrm{Int}(M_\omega).$$

よって $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ が外部的作用ならば, $\Gamma \overset{\alpha_\omega}{\curvearrowright} M_\omega$ も外部的作用となります. 上の結果を III 型にも拡張した定理もあります.

定理 6.6 (河東-Sutherland-竹崎)**.** M が AFD factor であれば, 次が成り立つ.

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(M) \text{ は拡張モジュラー自己同型と } \mathrm{Ad}\, u \text{ の合成}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\omega = \mathrm{id} \Leftrightarrow \alpha_\omega \in \mathrm{Int}(M_\omega).$$

6.3 Rohlin 性

Γ が従順離散群であるとします．このとき, Følner 条件が成り立ちます．つまり, 任意の有限部分集合 $F \subset \Gamma$ と $\varepsilon > 0$ に対して, ある有限部分集合 $K \subset \Gamma$ が $|gK\Delta K| < \varepsilon|K|$, $\forall g \in F$ となるように存在する．このような K を (F, ε) 集合と呼びます.

定理 6.7 (Connes, Ocneanu)**.** Γ を従順群, M を factor とする．$\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ は, 中心列環に外部的に作用すると仮定する．このとき, 任意の (F, ε) 集合 K に対して, M_ω の射影たち $\{E_g\}_{g\in\Gamma}$ が次のようにとれる.

- $E_g = 0\ \forall g \notin K$, $1 = \sum_{g\in K} E_g$.
- $\sum_{k\in K} |\alpha_g(E_k) - E_{gk}|_\tau < \varepsilon^{1/2}\ \forall g \in F$.

ここで $|x|_\tau := \tau(|x|)$ であり, $\tau(x) := \lim_{\nu\to\omega} x^\nu \in Z(M) = \mathbb{C}$.

この性質を Rohlin 性と呼びます． $\ell^\infty(\Gamma)$ には左移動作用で Γ が作用します. Rohlin 性は $\ell^\infty(\Gamma)$ が M_ω の中に近似的に Γ 作用を保ったまま埋め込めることを意味します．このような性質があると, 2 次コホモロジー消滅, 1 次コホモロジー消滅等の議論を行えます．そして最後に Evans-岸本のテクニックを使うと, 次の定理を得ます.

定理 6.8. Γ を従順群, M を factor とする．2 つの $\Gamma \overset{\alpha,\beta}{\curvearrowright} M$ は Rohlin 性を持つとする．このとき, $\alpha_g \circ \beta_g^{-1} \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ ならば, α と β はコサイクル共役である.

この定理は, McDuff factor のときには Ocneanu が「モデル作用の分離」をして証明しました. モデル作用の分離の代わりに Evans-岸本のテクニックを使うと, Rohlin 性さえあれば任意の factor についての主張に改良することができます.

長々と説明が続きましたが, 当初の目的であるコンパクト群の極小作用の話の続きをします. G がコンパクト群で, M が AFD II_1 型 factor, $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を極小作用とします. すると M^α に「双対群」のコサイクル作用 (β, c) ができて, $M = M^\alpha \rtimes_{(\beta,c)} \hat{G}$, $\alpha = \hat{\beta}$ となります．「双対群」は群ではないのですが, Kac 環の世界で考えると (β, c) が Rohlin 性を持つことを証明できます[9]．それから従う 2 次コホモロジー消滅定理から, 2 次コサイクル c は 1 であると仮定できます． M^α は AFD II_1 型 factor の subfactor なので AFD です．よって「双対群」版の外部作用の一意性から, β はコサイクル共役を除き一意の作用です．それゆえその双対作用 α は共役を除き一意であることが分かります.

定理 6.9. G をコンパクト群, M を AFD II_1 型 factor とすれば, G の M への極小作用は共役を除き一意的である.

まとめ 6.10. 従順群の外部的作用の分類において, Rohlin 性が重要.

[9] β は中心列を保存しないので工夫が必要です.

7　$\mathbb{R}$ 作用について

7.1　Rohlin 性

$\mathbb{R}$ の von Neumann 環 M への作用 α を考えます. 作用の代わりにフロー (flow) とも呼びます. $\mathbb{R}$ の外部的作用を分類することを考えます. 離散群やコンパクト群の場合, 極小性, 強外部性, Rohlin 性がキーワードでした. Flow の場合, これらのうち Rohlin 性が少し問題となります. 超積のところで触れましたが, 一般に α から作られる M_ω 上の flow α_ω は連続ではありません. この点が非常にやっかいな点です. 都合のよい部分環 $M_{\omega,\alpha}$ を

$$M_{\omega,\alpha} := \{(x^\nu)_\nu \in M_\omega \mid t \mapsto \alpha_t(x^\nu) \text{ は } \omega \text{ 同程度連続 }\}.$$

ここで, ω 同程度連続とは, 関数族 $\{t \mapsto \alpha_t(x^\nu)\}_\nu$ が ω の近傍上で同程度連続であるということです. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して, $\{\nu \in \mathbb{N} \mid \|\alpha_t(x^\nu) - x^\nu\|_2 < \varepsilon\ \forall t, |t| < \delta\}$ が超フィルター ω に属するということです.

問題 7.1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $(x^\nu)_\nu \in M_\omega$ から列 $(\int_{\mathbb{R}} f(t)\alpha_t(x^\nu)\,dt)_\nu$ を作ると, これは ω 同程度連続であることを示せ.

取扱い注意なのは, α_t は各点 t に対しては M_ω の外部的自己同型でも, $M_{\omega,\alpha}$ 上では自明になるケースもあるということです. これを見てみましょう.

例 7.2 (外部的 flow で Connes スペクトル 0)**.** $M := \bigotimes_{n=1}^\infty (M_2(\mathbb{C}), \mathrm{tr})$, $\alpha := \bigotimes_{n=1}^\infty \mathrm{Ad}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2^n t}\end{pmatrix}$ と定めると, α は外部的作用です. もちろん $e_n := e_{11} \otimes \cdots e_{11} \otimes 1 \otimes \cdots$ ($n-1$ 回 e_{11} をテンソルしたもの) は M^α に属し, $\mathrm{Sp}(\alpha^{e_n}) \subset (2\sqrt{3})^n\mathbb{Z} + 2^{n+1}\mathbb{Z} + \cdots \subset 2^n\mathbb{Z}$ です. したがって $\Gamma(\alpha) \subset \bigcap_n 2^n\mathbb{Z} = \{0\}$ となります.

命題 7.3. $M_{\omega,\alpha}$ 上の flow α_ω のスペクトルについては次のことが言える.

(1). $\ker(\alpha_\omega)^\perp = \mathrm{Sp}(\alpha_\omega) = \Gamma(\alpha_\omega)$.

(2). $\Gamma(\alpha_\omega) \subset \Gamma(\alpha)$.

例 7.2 で考えた flow α を考えます. これは (0 以外の) 各 t では外部的なので, 定理 6.5 によれば M_ω 上で $\alpha_t \neq \mathrm{id}$ です. しかし $\Gamma(\alpha) = 0$ なので, 前命題によれば α_ω は $M_{\omega,\alpha}$ 上で自明な flow となります.

予想 7.4. AFD factor 上の flow α に対しては, $\Gamma(\alpha_\omega) = \Gamma(\alpha)$.

その反対に, Connes スペクトルが full であっても外部的とは限りません.

例 7.5 (full Connes スペクトルで外部的でない flow)**.** §4.3 で考えた flow β は $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ のとき $\Gamma(\beta) = \mathbb{R}$ ですが, $\beta \in GL_2(\mathbb{Q})\theta$ のとき外部的ではありません.

この例から分かるように, $\mathbb{R}$ の外部的作用を考える際は Connes スペクトルもセットにした性質を付け加えておくことが重要です.

さて, flow の Rohlin 性は次のように定式化されています [11, 10].

定義 7.6. 任意の $p \in \mathbb{R}$ に対して, あるユニタリ $v \in M_{\omega,\alpha}$ が $\alpha_t(v) = e^{ipt}v$, $t \in \mathbb{R}$ となるように存在するとき, α は **Rohlin 性**をもつという.

Rohlin 性をもつ flow を Rohlin flow と呼びます. このとき明らかに α は外部的作用であり, 命題 7.3 から, α が Rohlin flow なら, $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ も従います. Rohlin 性の特徴付けは後回しにして, 分類結果を述べます.

定理 7.7 (増田-と)**.** α, β を factor M 上の Rohlin flow とする. もし各 $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\alpha_t \circ \beta_t^{-1} \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ ならば, α と β はコサイクル共役である.

それゆえ残った問題は, どういう flow が Rohlin 性をもつかというものです. 無限テンソル積型の flow は Rohlin 性をもつことが見た目から明らかなことが多いです. 例を見てみましょう.

例 7.8. §4.5 で構成した, $\mathbb{R}$ の極小作用 $\alpha_t = \bigotimes_1^\infty \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\mu t} \end{pmatrix}$ を考えます. たとえば $v_n := 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes e_{21} \otimes 1 \otimes \cdots$ (e_{21} は n 番目) と定めると, 明らかに $(v_n)_n$ は部分等距離作用素からなる 0 に収束しない中心列であり, $\alpha_t(v_n) = e^{i\lambda t}v_n$. よって $\lambda \in \mathrm{Sp}(\alpha_\omega)$. 同様に $\mu \in \mathrm{Sp}(\alpha_\omega)$. $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ だから $\mathrm{Sp}(\alpha_\omega) = \mathbb{R}$. ユニタリ固有ベクトルが存在することは次の命題かその次の命題から分かります.

下の命題は具体例を調べるときに役に立ちます. II_1 型以外のときも正しいと思いますが, まだ分かっていません.

命題 7.9. M が II_1 型 factor のとき, α が Rohlin flow $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Sp}(\alpha_\omega) = \mathbb{R}$.

命題 7.10. AFD II_1 型 factor への極小かつ概周期的な flow は Rohlin 性をもつ.

証明. α が概周期的であるとは, $M_p := \{x \in M \mid \alpha_t(x) = e^{ipt}x,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ とスペクトル部分空間を定めたとき, $\mathrm{span}\{M_p \mid p \in \mathbb{R}\}$ が M の中で強 (弱でもよい) 稠密なことを言います. M_p たちはトレースについて互いに直交するので (なぜでしょうか), $H := \{p \in \mathbb{R} \mid M_p \neq 0\}$ は高々可算集合です. §6.1 の議論 (コホモロジー消滅でない方) を M_p に適用すると, ユニタリ $v_p := M_p$ を取れます. とくに H は

稠密可算部分群であることが分かります．ここからは, α を離散可換群 H の「双対作用」と見なす方向へ議論をもっていきます．$\beta_p := \mathrm{Ad}\, v_p$ は AFD II_1 型 factor M^α 上に外部的コサイクル作用を起こすのでした．H には離散位相を入れているので, コサイクルを消すことができます．従って v_p を H のユニタリ表現に取っておけます．

次に β_p がよいユニタリ列からできる内部的自己同型で近似します．具体的には, $\beta_p := \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ad}\, w_p^n$, $\beta_q(w_p^n) - w_p^n \xrightarrow{\text{strong}} 0$. こうできるのは, $H \overset{\beta}{\curvearrowright} M^\alpha$ が外部的ゆえ Rohlin 性をもつためです．そこで $u_p^n := (w_p^n)^* v_p$ とおきます．すると, $u_p^n \in M_p$ であり, $x \in M^\alpha$, $q \in H$ に対して

$$\begin{aligned} u_p^n x v_q &= (w_p^n)^* \beta_p(x) v_{p+q} \sim x (w_p^n)^* v_{p+q} \\ &= x v_q \beta_{-q}((w_p^n)^*) v_p \sim x v_q (w_p^n)^* v_p = x v_q u_p. \end{aligned}$$

したがって, $(u_p^n)_n$ は M の中心列です．よって任意の $p \in H$ に対して, あるユニタリ $u_p \in M_{\omega,\alpha}$ が $\alpha_t(u_p) = e^{ipt} u_p$ となるように存在します．

$q \in \mathbb{R} \setminus H$ については, $p_n \to q$ となる点列 $p_n \in H$ を選び, $(u_{p_n}^n)_n$ という列を作れば, q を固有値にもつユニタリ中心列であることが分かります． $\square$

例 7.11 (概周期的かつ極小な作用の例)**.** 無限テンソル積を使わない例として, 次のようなものもありますが, $\mathbb{R}$ を $\mathbb{T}^2$ に稠密に埋め込んで作る方法なので多少新鮮味に欠けます．

M を II_1 型 factor として, そこに $\mathbb{Z}^2$ の外部的作用 β があると仮定します．接合積 $N := M \rtimes_\beta \mathbb{Z}^2$ の implementing unitary を u, v と書きます．ここには $\mathbb{Z}^2$ の双対群 $\mathbb{T}^2$ の極小作用 $\hat{\beta}$ が $\hat{\beta}_{(\gamma,\gamma')}(u) = \gamma u$, $\hat{\beta}_{(\gamma,\gamma')}(v) = \gamma' v$ となるように定まります．そこで非零な $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ を $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ ととり, $\alpha_t := \hat{\beta}_{(e^{i\lambda t}, e^{i\mu t})}$ とすれば, 概周期的かつ極小的な flow となります．

例 7.12. III 型だと概周期的かつ極小だけでは Rohlin 性は出ません．たとえば, $M := R_\lambda \otimes R_\mu$ を III_1 型 factor とします (R_λ と R_μ は Powers factor で $\log\lambda/\log\mu \notin \mathbb{Q}$). $\varphi_\lambda, \varphi_\mu$ をそれぞれ R_λ, R_μ の周期的状態とすれば, テンソル積状態 $\varphi_\lambda \otimes \varphi_\mu$ のモジュラー群は極小かつ概周期的ですが, モジュラー群は中心列に自明に作用するので Rohlin 性はありません．

問題 7.13. 前命題の証明のどこがこの場合に適用できないか調べてみよ．

もちろん概周期的であるが極小ではない Rohlin flow も存在します．

例 7.14 (概周期的だが極小でない Rohlin flow 1)**.** §4.3 で考えた flow $\mathbb{R} \overset{\beta}{\curvearrowright} M$ を考えます．外部性の条件は $\lambda, \mu \neq 0$ かつ $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ かつ $\lambda/\mu \notin GL_2(\mathbb{Q})\theta$ でした．この flow は明らかに概周期的ですが, エルゴード的なので極小的ではありません．これが Rohlin 性をもつことを [11] の方法で示します．$p \in \mathbb{R}$ に対して, 近似的に固有ベ

クトルとなるようなユニタリ中心列を取りたいわけです．そこで $(u^{m_k}v^{n_k})_k$ という列を考えて, いつそのような条件をみたすかを調べてみましょう．まず中心列の条件は, $k\to\infty$ のとき $uu^{m_k}v^{n_k}u^*-u^{m_k}v^{n_k}\to 0$ かつ $vu^{m_k}v^{n_k}v^*-u^{m_k}v^{n_k}\to 0$ です．u,v の交換関係を使って計算してみると, これは $e^{2\pi i n_k\theta}\to 1$ かつ $e^{-2\pi i m_k\theta}\to 1$ であることが分かります.

次に近似的に固有ベクトルとなるためには, $\beta_t(u^{m_k}v^{n_k})-e^{ipt}u^{m_k}v^{n_k}\to 0, \forall t$ となることが必要十分です．これは β の定義から $e^{i(\lambda m_k+\mu n_k)t}\to e^{ipt}, \forall t.$ となります. 問題はこのような条件をみたす $(m_k,n_k)\in\mathbb{Z}^2$ を取れるかということです．それには $\mathbb{R}^3$ の部分群

$$G:=\{(m\theta+k,n\theta+\ell,\lambda m+\mu n)\mid k,\ell,m,n\in\mathbb{Z}\}$$

が稠密であることを示せば十分です．もしそうでないとすると, 下記問題の結果からある非零な $\xi:=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ が存在して, $\langle g,\xi\rangle\in\mathbb{Z}, \forall g\in G$ となります．このとき $\langle g,\xi\rangle=(m\theta+k)x+(n\theta+\ell)y+(\lambda m+\mu n)z$ なので, $k=1,\ell=m=n=0$ とおくと, $x\in\mathbb{Z}$. $\ell=1,k=m=n=0$ とすれば, $y\in\mathbb{Z}$. 次に $m=1,k=\ell=n=0$ とすると, $x,y\in\mathbb{Z}$ より $\lambda z=-\theta x\in\mathbb{Z}\theta$. $k=\ell=m=0,n=1$ とすると, $\mu z=-y\theta\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta$. これらより $\lambda/\mu\in\mathbb{Q}$ となり不適です．よって $G\subset\mathbb{R}^3$ の稠密性が従います.

ちなみに今取った中心列 $(u^{m_k}v^{n_k})_k$ は C^* 環のレベルですでに中心列であることを注意しておきます.

問題 7.15. $G\subset\mathbb{R}^3$ が稠密でないとき, 上の例にあるようなベクトル $\xi\in\mathbb{R}^3$ が存在することを示せ．Hint: G を局所コンパクト可換群, H をその閉部分群とするとき, G/H の指標はどのように記述されるかを考えよ.

例 7.16 (概周期的だが極小でない Rohlin flow 2)**.** $M=\bigotimes_{n=1}^\infty(M_3(\mathbb{C}),\mathrm{tr})$ 上に flow $\alpha_t=\bigotimes_{n=1}^\infty \mathrm{Ad}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&e^{i\lambda_n t}&0\\0&0&e^{i\mu_n t}\end{pmatrix}$ を定める．もちろん α は概周期的です (条件付き期待値 E_n を使って考えてみよ)．ここで $\lambda_n\to\lambda$, $\mu_n\to\mu$ であって, さらに α は $\bigotimes_{n=1}^m M_3(\mathbb{C})$ 上で固定点が対角成分しかないように取れば, M^α は対角成分の増大からできる極大可換環 (Cartan 部分環) です．よって $\mathbb{C}\neq M^\alpha\subset(M^\alpha)'\cap M$ であり, 極小ではありません.

Rohlin 性を見るには次のようにします．n 番目だけ e_{21} からなる列を例 7.8 のように構成してみると, $\lambda_n\to\lambda$ より固有値 λ の部分等距離作用素が $M_{\omega,\alpha}$ ができます．μ に対してもそうで, 後は命題 7.9 を使えば OK です.

というわけで, Rohlin 性から極小性を導くことは一般にはできません．それは Rohlin 性がコサイクル共役で安定的性質であるのに対して, 極小性は不安定だから

です (非コンパクト群$\mathbb{R}$を考えているから). しかし強外部性についてはどうでしょうか. αがもしAFD II_1型factor M上のRohlin flowならば, ($\mathrm{Aut}(M) = \overline{\mathrm{Int}}(M)$だから) 分類結果から, 例7.8のタイプの無限テンソル積型作用とコサイクル共役となります. これは極小ですから, とくに強外部的です. 強外部性はコサイクル共役で安定的ですから, 結局AFD II_1型のときは次のことが分かりました.

系 7.17. Rohlin flowは強外部的である.

しかし証明に分類理論を使っていて, 何だかずるい気持ちも少ししますね. 直接証明する方法を考えましょう.

別証明 1. Mをfactorとし, $\mathbb{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$をRohlin flowとします. $p \in \mathbb{R}$を固定します. するとユニタリ中心列$(v_n)_n$が, $\alpha_t(v_n) - e^{ipt}v_n \overset{\text{strong}*}{\longrightarrow} 0$ $(n \to \infty)$となるように取れます. $N := M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$とおきます. N上で内部自己同型の列$\mathrm{Ad}\,\pi_\alpha(v_n)$が$\hat{\alpha}_p$に収束することを示します. もしこれが言えたとすると, $x \in \pi_\alpha(M)' \cap N$ならば, $\hat{\alpha}_p(x) = \lim_n \pi_\alpha(v_n) x \pi_\alpha(v_n^*) = x$となります. pは任意に取れるので, 結局$x \in N^{\hat{\alpha}}$であり$x \in \pi_\alpha(M)$. よって$x \in \mathbb{C}$となり, αの強外部性が従います.

$e_p \in C_b(\mathbb{R})$を$e_p(t) := e^{-ipt}$とおきます. このとき$M \otimes B(L^2(\mathbb{R}))$の中で, $\pi_\alpha(v_n) - v_n \otimes e_p \to 0$と強$*$収束することを示します. $\xi \in H$, $f \in L^2(\mathbb{R})$に対して,

$$\|(\pi_\alpha(v_n) - v_n \otimes e_p)(\xi \otimes f)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \|(\alpha_{-t}(v_n) - e^{-ipt}v_n)\xi|^2\, dt$$

となりますが, これはLebesgueの収束定理によって0に収束します. 同様に$\|(\pi_\alpha(v_n) - v_n \otimes e_p)^*(\xi \otimes f)\| \to 0$もいえます. よって強$*$収束$\pi_\alpha(v_n) - v_n \otimes e_p \to 0$がいえました. すると$\phi \in M_*$, $\psi \in B(L^2(\mathbb{R}))_*$に対して,

$$\|\pi_\alpha(v_n^*)(\phi \otimes \psi)\pi_\alpha(v_n) - (v_n^* \otimes e_p^*)(\phi \otimes \psi)(v_n \otimes e_p)\| \to 0,$$

ですが, v_nは中心列なので$\|[\phi, v_n]\| \to 0$であることから,

$$\|\pi_\alpha(v_n^*)(\phi \otimes \psi)\pi_\alpha(v_n) - (1 \otimes e_p^*)(\phi \otimes \psi)(1 \otimes e_p)\| \to 0,$$

このことから$\mathrm{Aut}(M \otimes B(L^2(\mathbb{R})))$の位相で, $\mathrm{Ad}\,\pi_\alpha(v_n) \to \mathrm{Ad}\,(1 \otimes e_p)$が分かります. これを$N$に制限すれば, $\mathrm{Aut}(N)$の位相で$\mathrm{Ad}\,\pi_\alpha(v_n) \to \hat{\alpha}_p$がいえます (下記問題参照).

問題 7.18. $Q \subset P$をvon Neumann環の包含とします. $\mathrm{Aut}(P, Q) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(P) \mid \alpha(Q) = Q\}$とすると$\mathrm{Aut}(N)$の閉部分群となることを示せ. また, 制限写像$\mathrm{Aut}(P, Q) \ni \alpha \mapsto \alpha|_Q \in \mathrm{Aut}(Q)$は連続群順同型であることを示せ.

別証明 2. 1 とほぼ同じ方法ですが, $N = M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ の中で生成元への振る舞いをみてみます. ただしこの方法だと各 $x \in N$ について, $\operatorname{Ad}\pi_\alpha(v_n)(x) \to \hat{\alpha}_p(x)$ しかいえていません ($\pi_\alpha(M)' \cap N = \mathbb{C}$ を見るには十分). 証明が遠回りになる分, いろいろと接合積の中身が見える気がします.

まず $a \in M$, $t \in \mathbb{R}$ として, $\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha$ に対して次の計算をしてみます.

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(v_n)\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha\pi_\alpha(v_n^*) &= \pi_\alpha(v_n a\alpha_t(v_n^*))\lambda_t^\alpha \\ &\sim \pi_\alpha(v_n a e^{-ipt} v_n^*)\lambda_t^\alpha \quad \text{(strongly)} \\ &\sim e^{-ipt}\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha \quad \text{(strongly)} \\ &= \hat{\alpha}_p(\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha).\end{aligned}$$

また $*$ の方は,

$$\begin{aligned}\pi_\alpha(v_n)(\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha)^*\pi_\alpha(v_n^*) &= \pi_\alpha(v_n)(\lambda_t^\alpha)^*\pi_\alpha(a^*)\pi_\alpha(v_n^*) \\ &\sim \pi_\alpha(v_n)(\lambda_t^\alpha)^*\pi_\alpha(v_n^* a^*) \quad \text{(strongly)} \\ &= \pi_\alpha(v_n\alpha_{-t}(v_n^*))(\lambda_t^\alpha)^*\pi_\alpha(a^*) \\ &\sim e^{ipt}(\lambda_t^\alpha)^*\pi_\alpha(a^*) \quad \text{(strongly)} \\ &= \hat{\alpha}_p((\pi_\alpha(a)\lambda_t^\alpha)^*).\end{aligned}$$

ゆえに各 $x \in \mathrm{C}^*(\pi_\alpha(M), \lambda^\alpha(\mathbb{R}))$ について, $\lim_n v_n x v_n^* = \hat{\alpha}_p(x)$ (強 $*$ 収束). これを $M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 上に拡大するには次のようにします. $\varphi \in M_*$ を忠実正則状態とし, $\hat{\varphi}$ を $M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 上の双対荷重とします. $\hat{\varphi}(c^*c) < \infty$ なる $c \in N$ を任意に取ります. すると

$$\|\pi_\alpha(v_n)c\pi_\alpha(v_n^*)\|_{\hat{\varphi}} = \varphi(v_n E_{\hat{\alpha}}(c^*c)v_n^*)$$

ですが, $\|[v_n, \varphi]\|_{M_*} \to 0$ なので,

$$\|\pi_\alpha(v_n)c\pi_\alpha(v_n^*)\|_{\hat{\varphi}} \to \|c\|_{\hat{\varphi}} \tag{7.1}$$

となります.

次に $f \in C(\mathbb{R})$ をコンパクト台をもつ連続関数, $a \in M$ とします. すると $b := \lambda^\alpha(f)\pi_\alpha(a)$ は $\hat{\varphi}$ について GNS ヒルベルト空間のベクトルを定めます (自然に $H_{\hat{\varphi}} = H_\varphi \otimes L^2(\mathbb{R})$). 簡単な計算から

$$\pi_\alpha(v_n)b\pi_\alpha(v_n^*) - \hat{\alpha}_p(b) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\lambda_t^\alpha\pi_\alpha(\alpha_{-t}(v_n)av_n^* - e^{ipt}a)$$

が分かります. 従って

$$\|\pi_\alpha(v_n)b\pi_\alpha(v_n^*) - \hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\|\alpha_{-t}(v_n)av_n^* - e^{ipt}a\|_\varphi^2\, dt$$

非積分関数は 0 に収束し, Lebesgue の収束定理から,

$$\lim_n \|\pi_\alpha(v_n)b\pi_\alpha(v_n^*) - \hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} = 0 \tag{7.2}$$

が分かりました.

さて b を先ほどのように取ります. 今 $x \in N$ に対して, $y \in \mathrm{C}^*(\pi_\alpha(M), \lambda^\alpha(\mathbb{R}))$ を

$$\|(x-y)b\|_{\hat{\varphi}} < \varepsilon, \quad \|(x^*-y^*)b\|_{\hat{\varphi}} < \varepsilon$$

となるように取ります. このとき

$$\begin{aligned}
\|(v_n x v_n^* - \hat{\alpha}_p(x))\hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} \leq & \|v_n x v_n^*(\hat{\alpha}_p(b) - v_n b v_n^*)\|_{\hat{\varphi}} && (7.3)\\
& + \|v_n(x-y)bv_n^*\|_{\hat{\varphi}} && (7.4)\\
& + \|v_n y v_n^*(v_n b v_n^* - \hat{\alpha}_p(b))\|_{\hat{\varphi}} && (7.5)\\
& + \|(v_n y v_n^* - \hat{\alpha}_p(y))\hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} && (7.6)\\
& + \|\hat{\alpha}_p((x-y)b)\|_{\hat{\varphi}} && (7.7)
\end{aligned}$$

と評価します. $\|\pi_\alpha(v_n)x\pi_\alpha(v_n^*)\| = \|x\|$, $\|\pi_\alpha(v_n)y\pi_\alpha(v_n)\| = \|y\|$ に注意して, (7.2) を使えば, (7.3), (7.5) が 0 に収束することが分かります. 次に (7.1) から, (7.4) は $\|(x-y)b\|_{\hat{\varphi}}$ に収束します. (7.6) に関しては, $y \in \mathrm{C}^*(\pi_\alpha(M), \lambda^\alpha(\mathbb{R}))$ なので 0 に収束します. 最後に $\hat{\varphi}$ は $\hat{\alpha}$ 不変荷重なので, (7.7) は $\|(x-y)b\|_{\hat{\varphi}}$ に等しいです. したがって,

$$\limsup_{v\to\infty} \|(v_n x v_n^* - \hat{\alpha}_p(x))\hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} \leq 2\|(x-y)b\|_{\hat{\varphi}} < 2\varepsilon.$$

まったく同様の評価を x^*, y^* についても行えば,

$$\limsup_{v\to\infty} \|(v_n x^* v_n^* - \hat{\alpha}_p(x^*))\hat{\alpha}_p(b)\|_{\hat{\varphi}} \leq 2\|(x^*-y^*)b\|_{\hat{\varphi}} < 2\varepsilon.$$

が言えます. $\varepsilon > 0$ が任意なことと, $b = \lambda^\alpha(f)\pi_\alpha(a)$ たちが $H_{\hat{\varphi}}$ の中で稠密であることから (もちろん考えている $\pi_\alpha(v_n)x\pi_\alpha(v_n^*)$ がノルム有界でもあることから), $\pi_\alpha(v_n)x\pi_\alpha(v_n^*)$ は $\hat{\alpha}_p(x)$ に強 $*$ 収束することが分かりました. □

以上の議論では, 暗に次の主張の一方を示しています.

命題 7.19. $\mathbb{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を factor M への flow とすると, α が Rohlin flow であることと, dual flow $\hat{\alpha}$ が不変的に近似的内部的であることは同値である.

ここで P 上の flow β が**不変的に近似的に内部的** (invariantly approximately inner) [10] とは, 任意の $T \in \mathbb{R}$ に対して, ユニタリ列 $u_n \in P$ が $\beta_T = \lim_n \mathrm{Ad}\, u_n$ かつ $\beta_t(u_n) - u_n \to 0$(強 $*$ 収束, $\forall t \in \mathbb{R}$) となるように存在することである. 明らかに近似的内部性よりも強い性質です.

[10] 副詞が 2 つに形容詞が 1 つのややこしい名称ですね. 何かいい名称はあればいいのですが.

例 7.20. M を AFD factor とすると, モジュラー自己同型群 σ^φ は不変的に近似的に内部的です. 実際モジュラー自己同型の特殊事情から, $\sigma_T^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ ならば AFD でなくとも不変的に近似的に内部的がいえます. というのも, φ を忠実正則状態として, $\sigma_T^\varphi = \lim_n \mathrm{Ad}\, u_n$ と表しておくと, $\varphi = \varphi\sigma_T^\varphi = \lim_n \varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_n$ となります. Connes コサイクルの汎関数に関する連続性から, $u_n^* \sigma_t^\varphi(u_n) = [D\varphi \circ \mathrm{Ad}\, u_n : D\varphi]_t \to [D\varphi : D\varphi]_t = 1$ となります (t に関して広義一様強 $*$ 収束).

一方 M が AFD のとき $\sigma_T^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ であることは, II 型のときは明らかで, III_λ $(\lambda \neq 1)$ のときは Connes により, そして最後に残った III_1 型の場合は Connes-Haagerup 理論により解決されました (§7.3 参照).

7.2 未解決問題

Rohlin flow に対しては分類が完成されているのでした. そこで残った問題は何が Rohlin 性を導くかということです.

予想 7.21. $\mathbb{R}$ の AFD II_1 型 factor M への flow α に対して, 次の条件は同値.

(1). α は外部的かつ $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$.

(2). α は強外部的である.

(3). α は Rohlin 性をもつ.

(1) では, 外部性とともに $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ も仮定しています. 一般には一方からもう一方が出ないからです. 実際, 例 7.2 の flow は外部的で $\Gamma(\alpha) = 0$ ですし, §4.3 で無理数回転環から構成した flow β は, 問題 4.15 により $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$ のとき $\Gamma(\beta) = \mathbb{R}$ です. しかし命題 4.14 によって, $\lambda/\mu \in GL_2(\mathbb{Q})\theta$ のときは外部的ではないことが分かります.

さて上の予想のうち, (2)⇒(1) は OK です. (3)⇒(2) は Lemma 7.17 で解決済みです. これまでの経験からすると, (1)⇒(2), そして (2)⇒(3) は両方とも肯定的に解けると思うのですが, どちらもまだ未解決です. (1)⇒(3) の部分的な結果として次のものがあります.

定理 7.22 (河東)**.** M を AFD II_1 型 factor, $\mathbb{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$ を flow とする. もし α が $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ かつ M のある Cartan 部分環を (各点ごとに) 固定するならば, α は無限テンソル積型 flow にコサイクル共役である. また, β を無限テンソル積型 flow とすれば α は β を吸収する, つまり $\alpha \otimes \beta$ は α とコサイクル共役である.

Cartan 部分環は AFD II_1 型因子環の中で同型によって相互に移しあえるので, $M = L^\infty(X) \rtimes \mathbb{Z}$, $\alpha|_{L^\infty(X)} = \mathrm{id}$. と仮定できます. $L^\infty(X)$ は行列環の無限テンソル積の対角成分から生成される Cartan 部分環に表現されできます. さらに α も

無限テンソル積型にするように同変に表現することを示せばRohlin性が従う, という方針で証明されました. ちなみに定理の条件から外部性が従うことを見るのは簡単です. 実際Aをαが固定するCartan部分環とし, ある$T \in \mathbb{R}$で$\alpha_T = \mathrm{Ad}\, u$と仮定します. すると$u \in A' \cap M = A$です. すると簡単に$\pi_\alpha(u^*)\lambda_T^\alpha$が$M \rtimes_\alpha \mathbb{R}$の中心に入ることが分かります. Connesスペクトルが$\mathbb{R}$なので中心は自明であるため, $T = 0$以外ありえないことが分かります.

強外部性のチェックも, 定理の証明とは別に直接できます.

問題 7.23. 前定理の仮定のもとに, αは強外部的であることを示せ.

系 7.24. MをAFD II_1型factor, $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$かつあるCartan部分環を固定するflow $\mathbb{R} \overset{\alpha}{\curvearrowright} M$はコサイクル共役を除いて一意的である. 特に$\alpha$はRohlin性をもつ.

予想7.21の解決のために, 定理7.22を経由するのであれば, Cartan部分環を固定するようにflowをコサイクル摂動することができることを示す必要があるでしょう.

III型の場合, 強外部性$M' \cap (M \rtimes_\alpha \mathbb{R}) = \mathbb{C}$よりも強い性質を仮定しなくてはならないでしょう (III_1型のときモジュラー自己同型群は強外部的だが, 中心列には自明に作用することを思い出そう).

予想 7.25. $\mathbb{R}$のAFD factor Mへのflow αに対して, 次の条件は同値.

(1). αは「とても外部的」である.

(2). αはRohlin性をもつ.

ここで「とても外部的」(very outer [11]) とは, $\tilde{M} = M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$を$M$のcore, $\tilde{\alpha}$をαのcoreへの標準拡大としたとき, $\tilde{\alpha}$が強外部的であることを意味する. つまり,

$$\tilde{M}' \cap (\tilde{M} \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{R}) = Z(\tilde{M}).$$

7.3 Connes-Haagerup理論との関係

まずConnes-Haagerup理論で何をどのような手順で示したかをまとめておきます.

忠実正則状態$\varphi \in M_*$に対して, **漸近的中心化環** (asymptotic centralizer) $\mathrm{AC}(\varphi)$と**漸近的第二中心化環** (asymptotic bicentralizer) $\mathrm{AB}(\varphi)$を次のように定義します.

$$\mathrm{AC}(\varphi) := \{(x^\nu)_\nu \in \ell^\infty(M) \mid \lim_{\nu \to \infty} \|[\varphi, x^\nu]\| = 0\},$$
$$\mathrm{AB}(\varphi) := \{x \in M \mid \lim_{\nu \to \infty} [x, x^\nu] = 0 \text{ 強収束}, \forall (x^\nu)_\nu \in \mathrm{AC}(\varphi)\}.$$

すると$\mathrm{AB}(\varphi)$はMのvon Neumann部分環となります ($\mathrm{AB}(\varphi) \subset M_\varphi' \cap M$に注意).

[11] もちろんこのノートだけの用語です.

定理 7.26 (Connes)**.** M を AFD III_1 型 factor とする．このとき次がいえる．

(1). もしある忠実正則状態 φ について $\mathrm{AB}(\varphi) = \mathbb{C}$ ならば, $\sigma_t^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(M), \forall t \in \mathbb{R}$.

(2). もし $\sigma_t^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(M), \forall t \in \mathbb{R}$ ならば, M は荒木-Woods factor に同型.

定理 7.27 (Haagerup)**.** M を AFD III_1 型 factor とする．このとき, 任意の忠実正則状態 φ に対して $\mathrm{AB}(\varphi) = \mathbb{C}$ がいえる．

Connes-Haagerup 理論の主定理 $\sigma_t^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(M)$ を認めることにして, Rohlin flow の分類の観点から定理 7.26(2) を証明してみましょう (もとの証明はモデル作用の分離をおこなうもの).

定理 7.26(2) の証明. σ^φ は不変的に近似的に内部的ですので (例 7.20), その core への双対 flow $\mathbb{R} \overset{\theta}{\curvearrowright} M \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R} := N$ は Rohlin 性をもちます (命題 7.19). さらに N のトレース τ を $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ とスケールします．もう一つ AFD III_1 型 factor P から core Q と θ' を構成します．すると, N と Q は AFD II_∞ 型 factor なので同型です ($N = Q$ とみなす). さらに θ, θ' は同じ割合で τ をスケールするので, $\theta_s \circ \theta'_{-s} \in \overline{\mathrm{Int}}(N)$ です．Rohlin flow の分類定理 (定理 7.7) より, θ と θ' はコサイクル共役．竹崎の双対定理から $M \otimes B(L^2(\mathbb{R})) \cong P \otimes B(L^2(\mathbb{R}))$. M, P は無限型 factor だから $M \cong P$. □

もし Connes-Haagerup の力を借りずにやりたいのならば, 次の問題を解決しなくてはならないでしょう．

問題 7.28. AFD II_∞ 型 factor への flow θ で $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ をみたすものが Rohlin 性をもつことを, Connes-Haagerup 理論を用いずに証明せよ．

ただ命題 7.19 の性質を考えてみると, ほとんど同等の難しさなのですが．次の問題も有名未解決問題です．これまでに発見された III_1 型 factor では反例が見つかっていません．

予想 7.29. 任意の III_1 型 factor に対して, 漸近的第二中心化環は自明か?

参考文献

[1] N. P. Brown, N. Ozawa, C*-algebras and finite-dimensional approximations, Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. xvi+509 pp.

[2] A. Connes, Classification of injective factors. Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$. Ann. of Math. (2) **104** (1976), 73–115.

[3] A. Connes, E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math. **134** (1975), 289–306.

[4] R. Høegh-Krohn, M. B. Landstad, E. Størmer, Compact ergodic groups of automorphisms, Ann. of Math. (2) **114** (1981), 75-86.

[5] 日合文雄, 柳研二郎, ヒルベルト空間と線型作用素, 牧野書店.

[6] A. Ioana, J. Peterson, S. Popa, Amalgamated free products of weakly rigid factors and calculation of their symmetry groups, Acta Math. **200** (2008), 85–153.

[7] M. Izumi, Canonical extension of endomorphisms of type III factors, Amer. J. Math. **125** (2003), 1–56.

[8] Y. Kawahigashi, One-parameter automorphism groups of the injective type II_1 factor arising from the irrational rotation C^*-algebra, Amer. J. Math **112** (1990), 499–524.

[9] Y. Kawahigashi, One-parameter automorphism groups of the hyperfinite type II_1 factor, J. Operator theory **25** (1991), 37–59.

[10] K. Kawamuro, A Rohlin property for one-parameter automorphism groups of the hyperfinite II_1 factor, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 641–657.

[11] A. Kishimoto, A Rohlin property for one-parameter automorphism groups, Comm. Math. Phys. **179** (1996), 599–622.

[12] W. L. Paschke, Integrable group actions on von Neumann algebras, Math. Scand. **40** (1977), 234–248.

[13] M. Takesaki, Theory of operator algebras. I, II, III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[14] 竹崎正道, 作用素環の構造, 岩波書店.

[15] S. Vaes, The unitary implementation of a locally compact quantum group action, J. Funct. Anal. **180** (2001), 426–480.

[16] A. Wassermann, Ergodic actions of compact groups on operator algebras. I. General theory, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 273–319.