Von Neumann 環への群・量子群作用の分類問題

戸松玲治

日本数学会年会＠京都大学

2013 年 3 月 22 日

北海道大学
HOKKAIDO UNIVERSITY

科研費
KAKENHI

作用の分類とは？

作用

- Γ : 局所コンパクト群
- $\mathcal{M}$: von Neumann 環 ($\mathcal{M}_*$ はノルム可分)
- $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$: 自己同型群 (u 位相を入れると Polish 群)

定義

連続な群準同型 $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ を**作用**という.

Examples

- Lie 群 $G \subset U(N)$ に対して，$g \mapsto \mathrm{Ad}\, g$ は $M_N(\mathbb{C})$ への作用.
- Lie 群 $G \subset U(N)$ に対して，$\mathcal{R}_0$ への作用を定める.

$$\mathcal{R}_0 = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (M_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr})'', \quad \alpha_g = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ad}\, g.$$

分類の意味

定義

作用 $\alpha, \beta \colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ が

- 共役 $\Leftrightarrow \exists\theta \in \mathrm{Aut}(M)$ s.t. $\alpha_t = \theta \circ \beta_t \circ \theta^{-1}$;
- コサイクル共役 $\Leftrightarrow \exists\alpha$-cocycle $v, \exists\theta \in \mathrm{Aut}(M)$ s.t.

$$\mathrm{Ad}\, v_t \circ \alpha_t = \theta \circ \beta_t \circ \theta^{-1}.$$

  ここで v のコサイクル関係式は，$v_t\alpha_t(v_s) = v_{t+s}$.
- 強コサイクル共役 $\Leftrightarrow$ 上の θ が approximately inner に取れる.

分類問題

作用を (強) コサイクル共役で分類せよ.

従順離散群の場合

この章では Γ は離散従順群を表す.
まず $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\mathcal{M} = \mathcal{R}_0$ の時を考える ($\mathcal{R}_0$ は従順 II_1 型因子環).
作用 $\alpha \colon \mathbb{Z} \curvearrowright \mathcal{R}_0$ に対して,

$$p(\alpha)\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \alpha^n \in \mathrm{Int}(\mathcal{R}_0)\}$$

と外部周期 $p := p(\alpha) > 0$ を定める.
$\alpha^p = \mathrm{Ad}\, u$ となる $u \in \mathcal{R}_0^{\mathrm{U}}$ を取ると, 次式が成り立つ.

$$\alpha(u) = \gamma u$$

$\gamma \in \mathbb{C}$ は p 乗根で, α の obstruction と呼ばれる.

定理 (Connes)

作用 $\alpha, \beta \colon \mathbb{Z} \curvearrowright \mathcal{R}_0$ がコサイクル共役
$\Leftrightarrow$ 外部周期と obstruction が等しい.

従順離散群 Γ の作用についても基本的な考え方は同じ.

$\alpha\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ の canonical extension $\widetilde{\alpha}\colon \Gamma \curvearrowright \widetilde{\mathcal{M}}$ を構成する.
ここで $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ ($\mathcal{M}$ の core と呼ぶ). これは II 型である.
$\operatorname{mod}(\alpha_g) = \alpha_g|_{Z(\widetilde{\mathcal{M}})}$ とおき, Connes–竹崎 module とよぶ.

次に外部周期に相当する正規部分群

$$N(\alpha) := \{n \in \Gamma \mid \widetilde{\alpha}_n \in \mathrm{Int}(\widetilde{\mathcal{M}})\}$$

と obstruction に相当する λ, 新しい不変量 μ と c を構成できる.

定理 (Connes, Jones, Ocneanu, 片山–Sutherland–竹崎)

$\operatorname{mod}(\alpha), N(\alpha), \lambda, \mu, c$ から定まるコホモロジークラスが強コサイクル共役についての完全分類不変量である.

証明の方針

最近，増田俊彦氏によってこれまでの方法とは異なる新しい証明が与えられた．
Key となるのは Bratteli-Elliott-Evans-岸本の方法 (Intertwining argument)．

ごく簡単に説明する．
2 つの作用 $\alpha, \beta \colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ が次の性質を持っているとする．

- α と β は互いにコサイクル摂動で近づけられる．
- α のコサイクルは，大体コバウンダリである $u_g \approx w\alpha_g(w^*)$．
  β のコサイクルもそうである．

そうすると次のようにして α と β を結びつけられる．

Bratteli-Elliott-Evans-岸本の方法

$\gamma^{-1} := \alpha$, $\gamma^0 := \beta$ とする.

1 番目の性質を交互に使って，作用の列 γ^n で $\gamma^n_g \approx \gamma^{n+1}_g$ となるものを構成する.
ここで γ^n は n が奇数の時は α の，偶数の時は β の摂動である.

次にコサイクルの積の収束に関わる問題を
2 番目の性質を使って次のようにクリアする.
コサイクルを小さいコサイクルとコバウンダリの積に書く.
小さいコサイクルの積は収束して，コバウンダリの方は $\mathrm{Ad}\, w_n$ の形になって $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 内で収束する.

問題はその性質 1，2 を確かめることである.
その為の鍵となるのが Rohlin 性.
中心的自由なコサイクル作用は Rohlin 性をもつ (Ocneanu).

Rohlin 性

V. Rokhlin (1919–1984)

Rohlin 性

$\mathcal{M}_\omega$ を ω-中心列のなす環とする．つまり，

$$(x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{M}_\omega \Leftrightarrow \lim_{n\to\omega} \|x_n\varphi - \varphi x_n\|_{\mathcal{M}_*} = 0,\ \forall\varphi \in \mathcal{M}_*.$$

すると $\alpha\colon \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}_\omega$ ができる．

$$\alpha_g((x_1, x_2, \dots)) := (\alpha_g(x_1), \alpha_g(x_2), \dots).$$

ポイント

- 今は Γ が離散群であるから，連続性の問題は気にする必要はない．$\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ のような連続群の取り扱いの難しさ．
- 自己準同型 $\rho \in \mathrm{End}(\mathcal{M})$ は中心列を保存するとは限らない．$\longrightarrow$ コンパクト群の双対の取り扱いの難しさ．

Rohlin 性

定義

α が Rohlin 性をもつとは，$L^\infty(\Gamma)$ の大きなコーナーが $\mathcal{M}_\omega$ に，大体同変に埋め込まれることを言う．

ここで「大きなコーナー」とは Følner 集合に台をもつことを意味している．

$\Gamma = \mathbb{Z}$ のときに説明する．
$N > 1$ に対して，$\mathcal{M}_\omega$ に射影たち $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}/(2N+1)\mathbb{Z}}$ があったとして

$$1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}/(2N+1)\mathbb{Z}} e_j, \quad \alpha(e_j) = e_{j+1} \text{ for } j \in \mathbb{Z}/(2N+1)\mathbb{Z}.$$

を満たしているとする．このとき $L^\infty(\{-N, \ldots, N\}) \to \mathcal{M}_\omega$ を自然に定めると大体同変になっている．

分類の手順

群作用，特に「強い外部性」をもったもの (つまり，不変量が Connes–竹崎 module だけ) の分類は大体次のようにしてできる．

- その強い外部性から Rohlin 性を導く．
- Rohlin 性をもったコサイクル作用の 2 次コホモロジー消滅定理を導く．
- Bratteli-Elliott-Evans-岸本の方法に使う 2 つの性質を導く．
- Bratteli-Elliott-Evans-岸本の方法を使う．

ポイント

- モデルを作ることが難しいケースに役立つ．
 (eg. コンパクト群の双対の作用，C^* 環上の群作用.)
- $\mathcal{M}$ に，factorality，従順性や McDuff 性を仮定せずにできることもある．

コンパクト群の場合

離散 Kac 環の作用

G をコンパクト群とし，作用 $\alpha\colon G \curvearrowright \mathcal{M}$ を考える．
接合積 $\mathcal{N} := \mathcal{M} \rtimes_\alpha G = \pi_\alpha(\mathcal{M})'' \vee (\mathbb{C} \otimes L(G))$ に双対作用が入る．
すなわち $\widehat{\alpha}\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N} \otimes L(G)$ を

$$\widehat{\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \pi_\alpha(x) \otimes 1, \quad \widehat{\alpha}(\lambda^\alpha(g)) = \lambda^\alpha(g) \otimes \lambda(g)$$

と定められる．すると $\widehat{\alpha}$ は Kac 環 $L(G) =: L^\infty(\widehat{G})$ の作用となる．

つまり coproduct $\Delta\colon L(G) \to L(G) \otimes L(G)$ を
$\Delta(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g)$ と定めると，

$$(\widehat{\alpha} \otimes \mathrm{id}) \circ \widehat{\alpha} = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \widehat{\alpha}.$$

中神–竹崎の双対性

Kac 環 $L(G)$ は Peter-Weyl の定理から離散群の一般化とも見なせる:

$$L(G) = \bigoplus_{s \in \mathrm{Irr}(G)} B(H_s).$$

この見方を積極的に援用する.
中神–竹崎の双対定理によって，コンパクト群の作用の研究を次のように言い換える.

言い換え

G の作用を研究することと，$\widehat{G}$ の作用の研究はある意味で等価である.

ある意味というのは，α から第 2 双対作用 $\alpha \otimes \mathrm{Ad}\,\rho$ を作ったとき $\mathrm{Ad}\,\rho \colon G \curvearrowright B(L^2(G))$ だけ α から違う，ということである.
またたとえ $\mathcal{M}$ が因子環であっても，$\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ もそうだとは限らないことには要注意.

主結果

定理 (増田–戸 '07, '10)

$\widehat{G}$ の従順因子環 $\mathcal{M}$ への中心的自由な作用は，Connes–竹崎 module によって分類できる.

中心的自由性 : $\forall s \in \mathrm{Irr}(G), \exists x \in \mathcal{M}_\omega$ s.t. $\widehat{\alpha}_s(x) \neq x \otimes 1$.

Corollary (増田–戸 '07)

コンパクト群 G の $\mathcal{R}_0$ への極小作用は共役を除いて unique である.

Proof.

仮定から，$\mathcal{R}_0 = (\mathcal{R}_0)^\alpha \rtimes_\beta \widehat{G}$ となる外部作用 β がある (2 次コホモロジー消滅が必要).
II_1 型の場合は外部的であれば，Connes–竹崎 module は自明かつ中心的自由なので上の定理から従う. □

予想

Corollary (増田–戸 '10)

G が半単純連結コンパクト Lie 群の時，従順 III_1 型因子環 $\mathcal{R}_\infty$ への極小作用は共役を除いて unique である．

中心的自由でない場合には，きれいな不変量を構成できていない．

Conjecture

一般の $\beta\colon \widehat{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ に対しては，

$$\mathcal{R} := \widetilde{\mathcal{M}}' \cap (\widetilde{\mathcal{M}} \rtimes_{\widetilde{\beta}} \widehat{G})$$

に $\widetilde{\beta}$ の双対作用 (G の作用)，dual flow θ，$\widehat{G}^{\mathrm{opp}}$ の作用 $\mathrm{Ad}(\lambda_s^\beta)^*$ が入る．
これらの組が強コサイクル共役による完全不変量であろう．

$\mathbb{R}$ の場合

外部性の導入

$\mathbb{R}$ の作用は flow と呼ばれる．当然非周期的な場合に興味がある．

問題点

このケースは双対に移っても flow なので，離散性を使った研究ができない．

とりあえず「外部性」を導入する．

定義

$\alpha\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$ を flow とする．α が

- 各点外部的 $\Leftrightarrow \alpha_t \notin \mathrm{Int}(\mathcal{M}), \forall t \neq 0$.
- 強外部的 $\Leftrightarrow \pi_{\tilde{\alpha}}(\widetilde{\mathcal{M}})' \cap (\mathcal{M} \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{R}) = Z(\widetilde{\mathcal{M}})$.
- Rohlin 的 $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}, \exists u \in \mathcal{M}_{\omega,\alpha}$ s.t. $\alpha_t(u) = e^{ipt}u$, $t \in \mathbb{R}$.

明らかな強弱：
Rohlin 的 $\Rightarrow$ 強外部的 $\Rightarrow$ 各点外部的.

Rohlin 性

$\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists u \in \mathcal{M}_{\omega,\alpha}$ s.t. $\alpha_t(u) = e^{ipt}u$, $t \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{M}_{\omega,\alpha}$ は中心列環 $\mathcal{M}_\omega$ の元で，
α に関して (α,ω)-同程度連続であるもののなす環である．

定義

$(x_1, x_2, \dots) \in \mathcal{M}_\omega$ が (α,ω)-同程度連続
$\overset{\text{defn}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $W \in \omega$
s.t. $|t| < \delta$, $\nu \in W \Rightarrow \|\alpha_t(x_\nu) - x_\nu\|_\phi^\sharp < \varepsilon$.

こうする理由：$\alpha\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}^\omega$ の連続性は期待できないから．
例外として modular flow がある．

定理 (安藤–Haagerup '12)

$\sigma^\varphi\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}^\omega$ は，超積状態 φ^ω の modular flow．特に連続．

もちろん $\sigma_t^\varphi = \mathrm{id}$ on $\mathcal{M}_\omega$．「Modular flow と Rohlin flow は対極」

主結果

定理 (増田–戸 '12)

$\mathcal{M}$ を von Neumann 環，α, β をその上の Rohlin flow とする．これらが強コサイクル共役であるには，$\alpha_t \beta_{-t} \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M}), \forall t \in \mathbb{R}$ であることが必要十分.

ポイント

$\mathcal{M}$ には可分性がありさえすればよい.
Factoriality, 従順性，McDuff 性もいらない.
cf. 融合積環上の flow の分類（嶌田氏）.

証明のスケッチ.

Step 1. $Z(\mathcal{M})^\alpha$ 上で直積分して centrally ergodic なものに分解.

$$\mathcal{M} = \int_X^\oplus \mathcal{M}_x \, d\mu(x), \quad \alpha_t = \int_X^\oplus \alpha_t^x \, d\mu(x).$$

Step 2. Rohlin 性をもつ centrally ergodic flow を分類.

$$\alpha_t(v) = e^{-2\pi i t/S} v, \quad v = \int_0^S e^{2\pi i \lambda/S} \, de(\lambda).$$

すると $\alpha_t(de(\lambda)) = de(\lambda + t)$，つまり $L^\infty(\mathbb{R}/S\mathbb{Z})$ が同変に $\mathcal{M}_\omega$ に入る.

2 次コホモロジー消滅定理を示したのち，intertwining argument を行う. $\square$

応用 1

Corollary (Connes, Haagerup, Krieger)

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ を従順 III 型因子環とする． $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ となるには，それらの flow space が同型であることが必要十分.

Proof.

Connes-Haagerup により，$\sigma_t^\varphi \in \overline{\mathrm{Int}}(\mathcal{M})$.
Modular auto の「特殊性」から，もっと強く「invariantly approximately inner」であることが従う．よってその双対 θ は Rohlin 性をもつ．あとは分類結果を使えばよい． □

定義

$\alpha\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$ が invariantly approximately inner
$\overset{\text{defn}}{\Leftrightarrow}$ $\forall T \in \mathbb{R}$, $\exists u_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{U}}$ s.t. $\alpha_T = \lim_n \mathrm{Ad}\, u_n$ かつ $(u_n)_n$ は (α, ω)-equivariant かつ $\alpha_t(u) = u$ for $u = (u_n)_n \in \mathcal{M}^\omega$, $t \in \mathbb{R}$.

応用 2

定理

$\mathcal{R}_{0,1}$ 上の trace-scaling flow は Rohlin 性をもつ．

Proof.

Connes-Haagerup より，$\mathcal{R}_\infty$ 上の modular flow は invariantly approximately inner.
よってその dual flow は Rohlin 性をもつ． □

ポイント

直接示せたわけではないことに注意．Connes-Haagerup を使っている．
III_1 型 AFD 因子環の uniqueness の証明は今のところこの一つしか知られていない．

予想

Conjecture

$\alpha\colon \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$ を flow，$\mathcal{M}$ は従順因子環とする．次の条件は同値であろう．

- 各点中心的非自明性，i.e. $\alpha_t \notin \mathrm{Cnt}(\mathcal{M})$ if $t \neq 0$.
- 強外部性，i.e. $\pi_{\tilde{\alpha}}(\widetilde{\mathcal{M}})' \cap (\mathcal{M} \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{R}) = Z(\widetilde{\mathcal{M}})$.
- Rohlin 性，i.e. $\forall p \in \mathbb{R}$, $\exists u \in \mathcal{M}_{\omega,\alpha}$ s.t. $\alpha_t(u) = e^{ipt}u$, $t \in \mathbb{R}$.

例：Product type flow，Cuntz 環の quasi-free flow etc.

この問題と類似するもの：
Haagerup による bicentralizer trivial の証明.
$\Longrightarrow$ Modular flow の特殊性がかなり効いている!
可換群の Rohlin 的作用の分類も多分できる.

コンパクト量子群の場合

G をコンパクト群とする.

- 積: $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$,
- Cancellation: $gh = gk \Longrightarrow h = k$

を連続関数環の言葉で書くと次のようになる.
まず $\delta\colon C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ を $\delta(f)(r, s) := f(rs)$ と定めと,

- 余結合律: $(\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \delta$,
- Cancellation: $\delta(C(G))(\mathbb{C} \otimes C(G))$ と $\delta(C(G))(C(G) \otimes \mathbb{C})$ は $C(G) \otimes C(G)$ の dense subspaces.

これらの性質のみを抽出してコンパクト量子群を定義する.

定義 (Woronowicz)

A を unital C*-algebra, $\delta\colon A \to A \otimes A$ を cancellation をもつ coproduct とするとき，組 $G := (A, \delta)$ をコンパクト量子群という．

A を G 上の連続関数環とみなしたいので，$C(G)$ と書く．
これだけの定義から Haar 測度に対応する状態 h の存在と一意性がしたがう．
GNS 表現先で weak closure を取った物を $L^\infty(G)$ と書く．

Examples

- コンパクト群．
- $SU_q(N)$，G_q (半単純コンパクト Lie 群の q 変形)．
- $A_o(F)$ や $A_u(F)$ などの普遍量子群．

無限テンソル積型作用

ユニタリ表現 $v \in B(H) \otimes L^\infty(G)$ を一つ取っておく．
写像 $\gamma\colon B(H) \to B(H) \otimes L^\infty(G)$ を

$$\gamma(x) = v(x \otimes 1)v^* \quad \text{for } x \in B(H)$$

と定めると，量子群の action である．つまり

$$(\gamma \otimes \mathrm{id}) \circ \gamma = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \gamma.$$

さらに γ は faithful であることも仮定する．
つまり，G の任意の既約表現はある $(v \otimes \overline{v})^{\otimes n}$ に含まれる．

Examples

$SU_q(2)$ の既約表現たちは半整数 $\nu \in (1/2)\mathbb{Z}_+$ でパラメトライズされる．
このとき $v := \pi_0 \oplus \pi_{1/2}$ とすれば，$\gamma = \mathrm{Ad}\, v$ は faithful.
しかし，$\mathrm{Ad}\, \pi_{1/2}$ は faithful ではない $(\pi_{1/2}^{\otimes 2} = \pi_0 \oplus \pi_1)$.

無限テンソル積型作用

群のときは無限テンソル積を考えると outer な例が出来るのであった.
そこで v を次々にテンソルしてテンソル積表現 $v^{\otimes n}$ を考える.
次に UHF 上に action を拡張する. ここで我々の UHF は

$$B(H) \to B(H)^{\otimes 2} \to \cdots \to B(H)^{\otimes n} \to \cdots .$$

$B(H)$ の不変状態 ϕ を一つ固定して, テンソル積状態 φ を作る.
それで弱閉包を取ったものを $\mathcal{M}$ と書く, つまり

$$(\mathcal{M}, \varphi) := \bigotimes_{n=1}^{\infty} (B(H)^{\otimes n}, \phi)''.$$

無限テンソル積型作用

G の作用が $B(H)^\infty$ から $\mathcal{M}$ に拡張する.
これを $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes L^\infty(G)$ と書き，無限テンソル積型作用と呼ぶ.
Fixed point algebra を $\mathcal{M}^\alpha := \{x \in \mathcal{M} \mid \alpha(x) = x \otimes 1\}$ と定める.
このとき次のことが成り立つ.

定理 (泉)

G は Kac 型でないとする (h は non-tracial) と，次がいえる.

- $(\mathcal{M}^\alpha)' \cap \mathcal{M} \neq \mathbb{C}$.
- $(\mathcal{M}^\alpha)' \cap \mathcal{M}$ は，dual $\widehat{G}$ 上のランダムウォークから決まる Poisson 境界 $H^\infty(\widehat{G}, \mu)$ に同型.

(1) の条件は，α が non-minimal であることを意味している.
今回は G_q の時にこの結果から一歩踏み出してみることにする.

予想

定理 (泉，泉-Neshveyev-Tuset，戸)

q 変形半単純コンパクト Lie 群 G_q については，

$$L^\infty(T\backslash G_q) \cong H^\infty(\widehat{G}).$$

$H^\infty(\widehat{G},\mu)$ を作る Markov 作用素は $L^\infty(\widehat{G})$ の center を保存するから，

$$H^\infty_{\mathrm{class}}(\widehat{G},\mu) := H^\infty(\widehat{G},\mu) \cap Z(L^\infty(\widehat{G}))$$

と定めると明らかに，

$$H^\infty_{\mathrm{class}}(\widehat{G},\mu) \subset Z(H^\infty(\widehat{G},\mu)).$$

Conjecture

実は等式が成り立つであろう．

予想

この予想は，$SU_q(2)$, $A_o(F)$, $A_u(F)$ で正しいことが分かっている．
なお，G の fusion 則が可換のときは，$H^\infty(\widehat{G})$ は factor であろうということ (林).
今回は G_q で正しいことを示した．

定理 (戸 '13)

$L^\infty(T\backslash G_q)$ は type I factor．とくに予想がなりたつ．

もっと強いことを主張する予想もある．

Conjecture

G の $H^\infty(\widehat{G}, \mu)$ への作用は，“approximately inner” であろう．

実際 approximately inner であれば，中心を固定するから，さっきの予想が従う．

product type action $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes L^\infty(G)$ を思い出そう.

$\mathcal{Q} := (\mathcal{M}^\alpha)' \cap \mathcal{M}$ は量子旗多様体 $L^\infty(T \backslash G_q)$ と同型であり，特に type I factor である.
よってテンソル積分解

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \vee \mathcal{Q} \cong \mathcal{R} \otimes \mathcal{Q}$$

が起きる．ここで $\mathcal{R} := \mathcal{Q}' \cap \mathcal{M}$.
作り方から $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{R}$ は既約な subfactor であることが分かる.
さらに depth 2 であることも確かめられる.
$\mathcal{M}^\alpha$-$\mathcal{M}^\alpha$-bimodule $\mathcal{R}$ を調べることにより，次のことが分かる.

定理 (戸 '13)

Subfactor $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{R}$ は, 極大トーラス T の minimal action から来る.

主結果

定理 (戸 '13)

$\alpha = \mathrm{Ind}_T^{G_q}\beta$ と書ける．ここで β は T の III 型因子環への極小作用．

特に β は，結果としては，α の T への制限で得られることに注意．つまり，

定理

β は $\alpha|_T$ にコサイクル共役．

$\mathcal{M}^\alpha = \mathcal{R}^\beta$ が III_1 型ならば，$\widehat{T}$ の centrally free な作用はコサイクル共役で unique だから，β は共役で unique である．

Corollary

α^1, α^2 を無限テンソル積型作用とする．もしそれらの固定点環が III_1 型ならば，α^1 は α^2 に共役．

問題

どのような β の誘導作用が無限テンソル積型か?

たとえば $G_q = SU_q(2)$ の時を考える.
固定点環 $\mathcal{M}^\alpha$ が II_1 型のときは，$\alpha_t = \sigma_t^\varphi$ のときに限る ($\mathcal{M}$ は III_q 型). よって，

定理

φ_λ を Powers 状態 ($\lambda = q$) とすると，$\mathrm{Ind}_T^{G_q} \sigma^{\varphi_\lambda}$ は product type.
実際に

$$\mathrm{Ind}_T^{G_q} \sigma^{\varphi_\lambda} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ad} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & u \\ 0 & v & y \end{pmatrix},$$

$$\phi = \frac{1}{1+q+q^{-1}} \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

まとめ

まとめ

まだまだ分からないことが沢山ある.

Thank you!