

Von Neumann 環への群・量子群作用の分類問題

戸松 玲治

北海道大学大学院理学研究院・数学部門

1 はじめに

群や量子群の作用の分類について、分かっていることと未解決の問題を述べたい。主に、離散群、実数群、コンパクト群、コンパクト量子群、離散量子群である(これらには従順性を仮定する)。最近は C^* 環でも群作用の研究の進展が著しいが、主に von Neumann 環の話をする。いくつか定義をしておく。

定義 1. Γ を局所コンパクト群 (もちろん Hausdorff も仮定), $\mathcal{M}$ を von Neumann 環とする。連続群準同型 $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M})$ を **作用** (action) と呼ぶ。

ここで $\text{Aut}(\mathcal{M})$ は集合としては $\mathcal{M}$ 上の automorphism (自動的に正則) の集まりであり、位相は u -topology を入れる ($\mathcal{M}$ が可分 von Neumann 環ならば Polish 群である。もちろん往々にして $\text{Aut}(\mathcal{M})$ は局所コンパクトではない)。つまり automorphism の列の収束 $\alpha_n \rightarrow \alpha$ を $\mathcal{M}_*$ のノルムを借りて定義する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n(\varphi) - \alpha(\varphi)\|_{\mathcal{M}_*} = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{M}_*.$$

ここで $\alpha(\varphi) := \varphi \circ \alpha^{-1}$. Haagerup の standard form の論文 [1] において、この位相が自然であることが論じられている。量子群の定義やその作用については後に述べる。

次に分類の基準をはっきりさせる。

定義 2. α, β を Γ の $\mathcal{M}$ への作用とする。これらが、

- **共役** (conjugate) $\stackrel{\text{defn}}{\iff} \exists \theta \in \text{Aut}(\mathcal{M}), \alpha_t = \theta \circ \beta_t \circ \theta^{-1}, t \in \Gamma;$
- **コサイクル共役** (cocycle conjugate)
 $\stackrel{\text{defn}}{\iff} \exists \theta \in \text{Aut}(\mathcal{M}), \exists v \text{ an } \alpha\text{-cocycle}, \text{Ad } v_t \circ \alpha_t = \theta \circ \beta_t \circ \theta^{-1}, t \in \Gamma.$

ただし連続写像 $v: \Gamma \rightarrow \mathcal{M}^U$ が α -cocycle とは、

$$v_s \alpha_s(v_t) = v_{st}, \quad s, t \in \Gamma$$

を意味する。ここで $\mathcal{M}^U$ は $\mathcal{M}$ のユニタリ群 (位相は強位相。弱位相を入れても同じ)。ちなみに Γ に Polish 性があれば、 α -cocycle の定義を Borel とか可測としても連続性が自動的に出る (たとえば、接合積の中で可測表現 $t \mapsto v_t \lambda^\alpha(t)$ を考えよ。2-cocycle では出ない)。

応用上、強コサイクル共役も導入しておいた方がよい。 θ を approximately inner で取れるときにそう言う、つまり、

定義 3. α, β を Γ の $\mathcal{M}$ への作用とする. これらが,

- **強コサイクル共役** (strongly cocycle conjugate)
 $\xLeftrightarrow{\text{defn}} \exists \theta \in \overline{\text{Int}}(\mathcal{M}), \exists v \text{ an } \alpha\text{-cocycle}, \text{Ad } v_t \circ \alpha_t = \theta \circ \beta_t \circ \theta^{-1}, t \in \Gamma.$

群作用の分類理論の目標は, 二つの作用が (強) コサイクル共役であることを見抜く完全分類不変量を構成することである.

さて, 群作用の分類の過程では, 作用もどきの「コサイクル作用」が介在することが多い. 大雑把には $\alpha_s \circ \alpha_t$ と α_{st} が内部自己同型の分だけの誤差があるものである (正確には Γ -kernel とか片山-竹崎の意味の “outer action” であって, 3 次コホモロジークラスが自明なもののこと).

定義 4. 連続 (可測) 写像 $\alpha: \Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M})$ と連続 (可測) 写像 $u: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathcal{M}^U$ の組 (α, u) が次の条件をみたすとき, **コサイクル作用** と呼ぶ.

- $\alpha_s \circ \alpha_t = \text{Ad } u_{s,t} \circ \alpha_{st}, \quad s, t \in \Gamma;$
- $u_{r,s} u_{rs,t} = \alpha_r(u_{s,t}) u_{r,st}, \quad r, s, t \in \Gamma.$

$\mathbb{R}$ のような連続群を考える場合, 可測コサイクル作用が自然に出てくる (連続関数を単関数で近似するのと同じ理由から). 群作用の分類理論は最終的には Kac 環の作用の分類に行き着き, $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes L^\infty(\Gamma)$ とか $v \in (\mathcal{M} \otimes L^\infty(\Gamma))^U$ とか書かれるから, 可測なものを考えた方が自然, とも言える.

コサイクル作用の摂動についても述べておく.

定義 5. (α, u) をコサイクル作用とし, $w: \Gamma \rightarrow \mathcal{M}^U$ を考える. このとき, $\beta_t := \text{Ad } w_t \circ \alpha_t$, $v_{s,t} := v_s \alpha_s(v_t) w_{s,t} v_{st}^*$ と定めると, (β, v) はコサイクル作用となる. これを (α, u) の w による摂動という.

とくに (α, u) を作用 $(\beta, 1)$ に摂動できるとき, 2-cocycle u を消せるという. たとえば $\mathcal{M}$ が真無限のときは, Sutherland の方法で必ず 2-cocycle を消せることが分かっているが, 単に消せばよいのではなく, 上の定義の w を 1 に近く取り直す技術がいろいろな局面で大事になってくる.

2 離散従順群の場合

離散従順群については満足いく結果がすでに出ている. もちろん従順性は, $\ell^\infty(\Gamma)$ の (特異な) 左不変状態の存在を意味する. α を従順 II_1 型因子環 $\mathcal{R}_0$ への $\mathbb{Z}$ 作用とし, 外部周期 $p(\alpha) \geq 0$ を

$$p(\alpha)\mathbb{Z} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha_k \in \text{Int}(\mathcal{M})\}$$

として定める．とくに $p(\alpha) = 0$ は α の外部性を意味する．さて $p := p(\alpha)$ として， $\alpha_p := \text{Ad } u$ となる $u \in \mathcal{M}^\cup$ を取る (スカラーの分だけ任意性が出る)．すると $\alpha_1(u) = \gamma u$ となる p 乗根 γ を得る．この γ は u の取り方によらずに決まり， α の **obstruction** と呼ぶ．

定理 1 (Connes). α, β を $\mathcal{R}_0$ への $\mathbb{Z}$ 作用とする．これらが (強) コサイクル共役であるためには，それらの外部周期と obstruction が一致することが必要十分．

念のため $\text{Aut}(\mathcal{R}_0) = \overline{\text{Int}}(\mathcal{R}_0)$ を注意しておく．一般の離散従順群の一般の従順因子環への作用については，statement が見かけ上複雑となるが，基本的には Connes のこの結果を踏襲，一般化したものである．簡単な説明に留める．

Γ を離散従順群， $\mathcal{M}$ を従順因子環， $\alpha: \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ を作用とする．この α に対して，“obstruction” を定義したいのであるが，III 型の $\mathcal{M}$ を扱う場合は $\text{Int}(\mathcal{M})$ を (extended) modular automorphism に取り替えなければならない．

$\tilde{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}$ を $\mathcal{M}$ の core, θ を dual flow とすると，canonical extension $\text{Aut}(\mathcal{M}) \ni \alpha \mapsto \tilde{\alpha} \in \text{Aut}_\theta(\tilde{\mathcal{M}})$ を得る [2]． $\tilde{\alpha}$ を中心 $Z(\tilde{\mathcal{M}})$ に制限したものを Connes-竹崎 module と呼び $\text{mod}(\alpha)$ と書く．

$\tilde{\mathcal{M}}$ は II 型であり，ここで内部的になるときを考える (外部周期の一般化):

$$N(\alpha) := \{n \in \Gamma \mid \tilde{\alpha}_n \in \text{Int}(\tilde{\mathcal{M}})\}.$$

これを α の modular part と呼ぼう．もちろん $N(\alpha)$ は Γ の正規部分群である．

各 $n \in N(\alpha)$ に対して，ユニタリ $u_n \in \tilde{\mathcal{M}}$ を $\tilde{\alpha}_n = \text{Ad } u_n$ と取る．すると次式で定まる $Z(\tilde{\mathcal{M}})^\cup$ 値関数 λ, μ を得る．

$$\alpha_g(u_{g^{-1}ng}) = \lambda(g, n)u_n, \quad u_mu_n = \mu(m, n)u_{mn}, \quad \forall g \in \Gamma, m, n \in N(\alpha).$$

1 つ目の式が Connes の obstruction に相当する．2 つ目の μ は $N(\alpha)$ の 2-cocycle relation で， $\mathbb{Z}$ の時は見えなかったものである．さらに dual flow との関わりもある:

$$\theta_t(u_n) = c_t(n)u_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, n \in N(\alpha).$$

この $c_t(n)$ は modular invariant と呼ばれ，III 型環の場合は非自明になりうる．

定理 2 (Jones, Ocneanu, 片山-Sutherland-竹崎). 上記 $\text{mod}, \lambda, \mu, c$ のコホモロジークラスは α の (強) コサイクル共役による完全不変量を与える．

このように，Jones の $\mathcal{R}_0$ への有限群作用，Ocneanu の従順半有限因子環への離散従順群作用と研究が進み，途中 Jones-竹崎の groupoid 作用，河東-Sutherland-竹崎による $\overline{\text{Int}}(\mathcal{M})$, $\text{Cnt}(\mathcal{M})$ の特徴付け，III 型環への有限群作用の研究があった後，片山-Sutherland-竹崎により最終的に決着された．

以前は原典しか証明がなく、characteristic invariant の取り扱いに慣れていなければフォローするのが (少なくとも私には) 大変であったが、最近増田俊彦氏によってかなり簡略化された証明が与えられた [9].

増田氏の証明で活躍するのが、Evans-岸本による C^* 環への群作用の研究で編み出された intertwining argument である. さらに遡って Bratteli や Elliott の AF 環間の同型を構成するやり方とも関連するため、Bratteli-Elliott-Evans-岸本の intertwining argument と呼ばれる (これからの標準呼称となりそうである).

一番のメリットは Connes 以来の伝統である “model action の分離” が不必要なことである (model の分離も大事な議論であることに変わりはない). そのため、たとえば場合によっては環に McDuff 性を仮定しなくとも分類できてしまうこともある (Rohlin flow がその例). またそもそもテンソル積型の model を作るのが大変な場合に重宝する (例えばコンパクト群の双対 $\hat{G}$ の作用).

Intertwining argument をごく簡単に説明する. 2つの作用 $\alpha, \beta: \Gamma \curvearrowright \mathcal{M}$ を考える. このとき次の2つの条件を満たすと仮定する.

条件 1. α をコサイクル摂動して、 β に近づけられる. 同様に β も α に近くコサイクル摂動できる.

条件 2. α と β のコサイクルは大体コバウンダリである.

そうすると α と β の強コサイクル共役が出る, という仕組みである. まず $\gamma^{-1} := \alpha, \gamma^0 := \beta$ とおく. 1つ目の条件をずっと使い続けていって作用の列 γ^n を得る. ここで, n が奇数の時は α のコサイクル摂動, 偶数の時は β のそれである. だから $n \rightarrow \infty$ では γ^n と γ^{n-1} の差は 0 に収束する.

この時コサイクルの積の収束性が問題となる. 条件 2 を使ってコサイクルをコバウンダリで近似しておけば, コサイクルを「1に近いコサイクルの部分」と「コバウンダリの部分」の積に分けられる. 1に近い部分の積は収束し, コバウンダリ部分は $\text{Int}(\mathcal{M})$ の元を定め $\text{Aut}(\mathcal{M})$ で収束させられる (従って $\overline{\text{Int}}(\mathcal{M})$ の元で結びつける). 少し不正確だが, 以上が intertwining argument の核心である.

というわけなので2つの条件を出すことが肝要である. これは Ocneanu の 2 次コホモロジー消滅定理 (評価つきであることが大事) が本質的に効いてくる.

定理 3 (Ocneanu). (α, u) を Γ の従順因子環 (又は McDuff 因子環) $\mathcal{M}$ へのコサイクル作用とする. もしそれが「中心的に自由」であれば, u はコバウンダリである. また u が 1 に近ければ, 摂動するユニタリも 1 に近く取れる.

ここで中心的自由性とは, α が中心列環 $\mathcal{M}_\omega$ 上で外部的に振る舞うことを意味する. すると Rohlin 性を持つことがいえて $\ell^\infty(\Gamma)$ を「大体」同変に $\mathcal{M}_\omega$ の中に「大体」埋め込むことが出来る. そして Ocneanu の averaging の方法でコホモロジーを消すことができる.

3 コンパクト群の場合

コンパクト群の作用の分類は離散従順群作用の分類の一般化と思える、ということをもまず説明したい。

G をコンパクト群, $\alpha: G \curvearrowright \mathcal{M}$ を作用とする. すると固定点環 $\mathcal{M}^\alpha$ と接合積 $\mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ が出来る. 今回は接合積に注目する. 接合積には可換群の場合と同様に, 双対 $\hat{G}$ の作用が入る. この $\hat{G}$ は Kac 環の言葉で理解できる.

まず左正則表現による群 von Neumann 環 $L(G) := \{\lambda(g) \mid g \in G\}''$ を考える. 次に余積 $\Delta: L(G) \rightarrow L(G) \otimes L(G)$ を $\Delta(\lambda(g)) = \lambda(g) \otimes \lambda(g)$ によって定める. ここで組 $(L(G), \Delta)$ (正確にはこれに Δ 不変荷重を合わせたもの) を G の双対 $\hat{G}$ と呼ぶ. また $L(G)$ は非可換空間 $\hat{G}$ 上の関数環なのだ, という精神で $L^\infty(\hat{G})$ と書く.

さて接合積 $\mathcal{N} := \mathcal{M} \rtimes_\alpha G$ に戻ろう. 正則 $*$ 準同型 $\hat{\alpha}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \otimes L^\infty(\hat{G})$ を

$$\hat{\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \pi_\alpha(x) \otimes 1, \quad \hat{\alpha}(\lambda^\alpha(g)) = \lambda^\alpha(g) \otimes \lambda(g), \quad x \in \mathcal{M}, g \in G$$

として定め, 双対作用と呼ぶ. $\hat{\alpha}$ は Kac 環の作用の式

$$(\hat{\alpha} \otimes \text{id}) \circ \hat{\alpha} = (\text{id} \otimes \Delta) \circ \hat{\alpha}$$

をみたす.

ここで Peter-Weyl の定理 ($L^2(G)$ の既約分解についての定理) を思い出すと, $L(G)$ は行列環 $B(H_\pi)$ の直和 von Neumann 環 (π は G の既約表現) に同型であることが分かる. それゆえ $\hat{G}$ は離散群の一般化と考えられる.

中神-竹崎の双対定理によって, 作用を分類することとその双対作用を分類することとは大体同等である. よってコンパクト群作用の問題は双対 $\hat{G}$ の作用の問題にすり替わるわけである. まず modular part がない場合はきれいな分類結果を得られる.

定理 4 ([10, 11]). $\hat{G}$ の従順因子環への中心的自由な作用は Connes-竹崎 module を持ち, それが強コサイクル共役についての完全不変量である.

系 5 ([10]). コンパクト群の $\mathcal{R}_0$ への極小作用は共役の意味で一意的である.

泉氏の論文 [4] で注意されているように, $\hat{G}$ の作用がいつも $Z(\tilde{\mathcal{M}})$ を global に不変にしているわけではない. しかし中心的自由性があれば $Z(\tilde{\mathcal{M}})$ に作用を引き起こす. 中心的自由な作用は modular part がない場合に対応するのだが, non-trivial modular part がある場合はまだ一般的な結果を得られていない.

従順因子環 $\mathcal{M}$ への作用 $\beta: \hat{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ に対して, 相対可換子環 $\mathcal{R} := \tilde{\mathcal{M}}' \cap (\tilde{\mathcal{M}} \rtimes_{\tilde{\beta}} \hat{G})$ を考える. $\mathcal{R}$ には G の作用 ($\tilde{\beta}$ の双対作用), dual flow θ , そして $\hat{G}^{\text{opp}}$ の作用が入る ($x \mapsto \text{Ad}(\lambda_{\tilde{\pi}}^{\tilde{\beta}})^*(x \otimes 1)$). これらは従順離散群の場合の modular invariant や characteristic invariant に対応している. Connes-竹崎 module に対応するのは, $\hat{G}^{\text{opp}}$ の作用を $\mathcal{R}^G = Z(\tilde{\mathcal{M}})$ に制限したものである. 従って次の予想が成り立つと思われる.

予想 1. $G, \hat{G}^{\text{opp}}$, そして $\mathbb{R}$ 作用の入った相対可換子環 $\mathcal{R}$ の共役類が β のコサイクル共役についての完全不変量を定める.

4 $\mathbb{R}$ の場合

次に $\mathbb{R}$ 作用 (flow) についてまとめる. これまで見てきたように群作用の分類理論は, 「外部作用」を分類することを基本とする. 連続群に対して何を「外部性」と呼ぶかはその時それぞれの必要性による.

定義 6. Flow $\alpha: \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$ を考える. α が

- (1). **各点外部的** (pointwise outer) $\stackrel{\text{defn}}{\iff} \alpha_t \notin \text{Int}(\mathcal{M})$ if $t \neq 0$.
- (2). **強外部的** (strongly outer) $\stackrel{\text{defn}}{\iff} \mathcal{M}' \cap (\mathcal{M} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}) = \mathbb{C}$.
- (3). **Rohlin 性**をもつ $\stackrel{\text{defn}}{\iff}$ すべての $p \in \mathbb{R}$ に対して, つまり $\alpha_t(u) = e^{ipt}u$ となるユニタリ $u \in \mathcal{M}_{\omega, \alpha}$ を取れる [7, 8].

最後の $\mathcal{M}_{\omega, \alpha}$ は中心列環 $\mathcal{M}_{\omega}$ の部分環で α について同程度連続に振る舞う中心列を集めたものである. 一般に flow は $\mathcal{M}_{\omega}$ 上で不連続であるため, 中心列のうちでいいものを集めて来るのである. ここで $(x^{\nu})_{\nu} \in \ell^{\infty}(\mathcal{M})$ が同程度連続とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ と $W \in \omega$ が存在して, $\nu \in W$ ならば,

$$\|\alpha_t(x^{\nu}) - x^{\nu}\|_{\varphi}^{\sharp} < \varepsilon, \quad |t| < \delta$$

となることを意味する (φ は正則忠実状態). 各 ν ごとに δ_{ν} を取れることは明らかだが, 多くの ν について一斉に共通の δ を取ることができる, という点がポイントである. また Rohlin 性は, 少なくとも $\mathcal{M}$ が因子環である場合について, α が $\mathcal{M}_{\omega, \alpha}$ 上に非周期的であることと同値である.

3 種類の外部性の間には, Rohlin 性 $\Rightarrow$ 強外部的 $\Rightarrow$ 各点外部的 & $\Gamma(\alpha) = \mathbb{R}$ という強弱関係がある. 従順因子環に対するこれらの同値性についてはまだ分かっていない重要な問題である (正確には, III 型の場合は core, canonical extension を考えなくてはならない).

問題 1. $\mathcal{M}$ が従順因子環のとき, 3 種類の外部性は互いに同値か?

ここでは Rohlin flow の分類理論を紹介する. $\mathcal{M}$ は単に可分 von Neumann 環とする. 因子環であることも従順であることも仮定しない. α が Rohlin 性をもつとする. $S > 0$ に対して $p := -2\pi/S$ とおき, 定義 6 (3) の u をスペクトル分解する:

$$u = \int_0^S e^{ip\lambda} dE(\lambda).$$

すると $\alpha_t(dE(\lambda)) = dE(\lambda + t)$ が分かる．つまり 1 次元 torus の回転が $\mathcal{M}_{\omega, \alpha}$ 上に起こる． S をどんどん大きくしていけば, $L^\infty(\mathbb{R})$ を「大体」同変に「大体」埋め込める, という状況になる．よって (Rohlin 性をもつコサイクル作用に対して) 2 次コホモロジー消滅定理を示せる．後は基本的には離散従順群の場合と同じ要領で intertwining argument を行える．

定理 6 ([12]). $\mathcal{M}$ を von Neumann 環, $\alpha, \beta: \mathbb{R} \curvearrowright \mathcal{M}$ を Rohlin flow とする．これらが強コサイクル共役であるための必要十分条件は $\alpha_t \beta_{-t} \in \overline{\text{Int}}(\mathcal{M}), \forall t \in \mathbb{R}$ をみたすことである．

コサイクル共役による分類はまだできていない．Rohlin flow がいつ存在するかという問題については, full factor でなければ存在するように思われる．最近, 寫田氏は non-McDuff, non-full な融合積 von Neumann 環上に Rohlin flow を構成し, コサイクル共役と強コサイクル共役の強弱について論じている [13]．

可換 von Neumann 環上の ergodic な非周期的 flow は Rohlin 性をもつ．とくに III_0 型因子環の flow of weights は Rohlin 性をもつ．この性質を使うと III_0 型 factor が full でないこと (Connes による) が証明できる．また河東氏の flow についての一部の結果, 従順 III 型因子環の flow of weights を用いた分類 (Haagerup の bicentralizer についての結果は認める) についてもすっきりとした証明を与えられる．

5 コンパクト量子群の場合

次にコンパクト量子群の作用を考える．Woronowicz のコンパクト量子群とは, unital C^* 環 A と余積 $\delta: A \rightarrow A \otimes A$ の組のことである (他に cancellation という条件も必要)．この A を非可換空間 $\mathbb{G}$ 上の連続関数環とみなし, $C(\mathbb{G})$ と書く．

コンパクト量子群には Haar 状態と呼ばれる状態 $h: C(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ がただ 1 つ存在する:

$$(\text{id} \otimes h) \circ \delta = h(\cdot)1 = (h \otimes \text{id}) \circ \delta.$$

ここでは h を忠実と仮定し, その GNS 表現空間を $L^2(\mathbb{G})$, GNS 巡回ベクトルを ξ_h , $C(\mathbb{G})$ の弱閉包を $L^\infty(\mathbb{G})$ と書く．このとき $L^2(\mathbb{G}) \otimes L^2(\mathbb{G})$ 上のユニタリ V が

$$V(x\xi_h \otimes \eta) = \delta(x)(\xi_h \otimes \eta), \quad x \in C(\mathbb{G}), \eta \in L^2(\mathbb{G})$$

を満たすように存在する． V は五角等式 $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ を満たし, 乗法的ユニタリと呼ばれる．各 $x \in L^\infty(\mathbb{G})$ に対して, $\delta(x) := V(x \otimes 1)V^*$ と定めることで余積 δ が $L^\infty(\mathbb{G})$ 上に拡張する．

さて V は $B(L^2(\mathbb{G})) \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ に属することが分かる．また $(\text{id} \otimes \delta)(V) = V_{12}V_{13}$ を満たす, つまり V はユニタリ表現である (右正則表現と呼ぶ)． V の左側のテン

ソル成分が生成する von Neumann 環を $R(\mathbb{G})$ と書き, 量子群 von Neumann 環と呼ぶ. コンパクト群の場合と同様に, $R(\mathbb{G})$ は行列環 $B(H_\pi)$ の直和となる. また $\Delta(x) := V^*(1 \otimes x)V$ によって Hopf 代数の構造も入る. $(R(\mathbb{G}), \Delta)$ を双対量子群と呼び, $\hat{\mathbb{G}}$ と書く.

コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ の von Neumann 環 $\mathcal{M}$ への作用とは, 忠実正則 $*$ 準同型 $\alpha: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes L^\infty(\mathbb{G})$ で $(\alpha \otimes \text{id}) \circ \alpha = (\text{id} \otimes \delta) \circ \alpha$ をみたすもののことであり, 双対 $\hat{\mathbb{G}}$ の作用も同様に定義する.

量子群の作用にはまだ分からないことが多い. たとえば極小性 (minimality) をもつ作用が従順因子環上に存在するかどうかは重要な未解決問題である. コンパクト群の時は無限テンソル積を考えればよいのだが, コンパクト量子群の場合は事情が変わってくる.

定理 7 (泉). $\alpha: \mathbb{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ を無限テンソル積作用とする. このとき非可換 Poisson 境界 $H^\infty(\mathbb{G}, P_\mu)$ と $(\mathcal{M}^\alpha)' \cap \mathcal{M}$ との間に $\mathbb{G}$ 同変な同型が存在する.

以後, 泉氏の非可換 Poisson 境界の理論について説明をする. $B(H_\pi)$ 上の不変状態を ϕ_π と書く. そこで $P_\pi := (\text{id} \otimes \phi_\pi) \circ \Delta$ と $R(\mathbb{G})$ 上の正則完全正值写像を定義する. これは離散群上の右移動作用に相当するものである. 次に μ を $\text{Irr}(\mathbb{G})$ 上の確率測度で, support が $\text{Irr}(\mathbb{G})$ を「半群」として生成するものとする. この μ から非可換 Markov 作用素 $P_\mu := \sum_\pi \mu(\pi) P_\pi$ を作る. そして P_μ が固定する元の集まりを $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ と書く, つまり

$$H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu) := \{x \in R(\mathbb{G}) \mid P_\mu(x) = x\}.$$

明らかに $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ は $R(\mathbb{G})$ の弱閉な operator system である. さらに Choi-Effros 積を入れることにより von Neumann 環の構造をもつ. これを (非可換) **Poisson 境界** という. Choi-Effros 積の具体的な表示としては,

$$x \cdot y = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\mu^n(xy)$$

がある (強収束). 収束性については [3] の証明の他, Arveson の dilation によるシンプルかつ強力なものが知られている ([5] 参照のこと).

さて Poisson 積分 $\Theta: L^\infty(\mathbb{G}) \rightarrow R(\mathbb{G})$ を

$$\Theta(x) := (\text{id} \otimes h)(V^*(1 \otimes x)V), \quad x \in L^\infty(\mathbb{G})$$

によって定めると, 像は $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ に入ることが分かる (Θ は μ に依存しない). $\mathbb{G}$ に「可換 fusion 則」($\pi \otimes \rho \cong \rho \otimes \pi$) と「余従順」($\hat{\mathbb{G}}$ が従順ということ [14]) があると全射となる.

定理 8 ([3, 6, 15]). $\mathbb{G}$ をコンパクト量子群とする. もしも $\mathbb{G}$ の fusion 則が可換でかつ $\hat{\mathbb{G}}$ が従順であれば, Θ は $L^\infty(\mathbb{K} \setminus \mathbb{G})$ から $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ への同型となる. ここで $\mathbb{K}$ は $\mathbb{G}$ の極大 Kac 型量子部分群.

たとえば $\mathbb{G}$ がコンパクト Lie 群の q 変形ならば, $\mathbb{K}$ は極大トーラス ($\mathbb{T}$ と書く) である.

いくつかの問題をあげておく. 作用素 P_μ は中心 $Z(R(\mathbb{G}))$ を保存する. そこで Poisson 境界の classical part を

$$H_{\text{class}}^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu) := H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu) \cap Z(R(\mathbb{G}))$$

と定める. これは $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ の部分環であり, 明らかに

$$H_{\text{class}}^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu) \subset Z(H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu))$$

である. 実は等号が成り立つのではないかと予想している. 例えば $\mathbb{G}$ の fusion 則が可換のときは, $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ は因子環であろう, ということを言っている. 実際に q 変形の時や $A_o(F)$ のときは因子環である.

定理 9 ([16]). $\mathbb{G}$ がコンパクト Lie 群の q 変形の時, $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu) \cong L^\infty(\mathbb{T} \backslash \mathbb{G})$ は無限次元 I 型因子環である.

これは $Z(L^\infty(\mathbb{G}))$ への極大トーラスの作用が忠実かつ ergodic であることを示すことで証明できる.

以後 $\mathbb{G}$ はコンパクト Lie 群の q 変形とする. もう一度無限テンソル積作用 $\alpha: \mathbb{G} \curvearrowright \mathcal{M}$ に戻る. Von Neumann 環として $H^\infty(\hat{\mathbb{G}}, P_\mu)$ と $\mathcal{Q} := (\mathcal{M}^\alpha)' \cap \mathcal{M}$ は同型であった. 今 $\mathcal{Q}$ は I 型因子環だから, テンソル積分解 $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M}) \vee \mathcal{Q} \cong (\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M}) \otimes \mathcal{Q}$ を得る. すると包含 $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{Q}' \cap \mathcal{M}$ は depth 2 かつ既約であることが分かる. よって何かあるコンパクト量子群 $\mathbb{H}$ の極小作用 $\beta: \mathbb{H} \curvearrowright \mathcal{Q}' \cap \mathcal{M}$ が存在して, $\mathcal{M}^\alpha = (\mathcal{Q}' \cap \mathcal{M})^\beta$ となる. 実際には $\mathbb{H}$ は極大トーラス $\mathbb{T}$ である.

このとき α は $\text{Ind}_{\mathbb{T}}^{\mathbb{G}} \beta$ と共役であると予想される. この予想がいつも (可換 fusion 則, 余従順のクラスで) 正しければ, α は $\text{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} \beta$ と書け, α が極小でないことのきれいな説明となる. この問題の解決には, C^* 環 $C(\mathbb{K} \backslash \mathbb{G})$ の表現論の整備を必要としているように思われる.

参考文献

- [1] Haagerup, U., The standard form of von Neumann algebras, Math. Scand. **37** (1975), 271–283.
- [2] Haagerup, U., Størmer, E., Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights, Adv. Math. **83** (1990), 180–262.
- [3] Izumi, M., Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions, Adv. Math. **169** (2002), 1–57.

- [4] Izumi, M., Canonical extension of endomorphisms of type III factors, *Amer. J. Math.* **125** (2003), 1–56.
- [5] Izumi, M., E_0 -semigroups: around and beyond Arveson’s work, *math.OA/1209.5838*.
- [6] Izumi, M., Neshveyev, S., Tuset, L., Poisson boundary of the dual of $SU_q(n)$, *Commun. Math. Phys.* **262** (2006), 505–531.
- [7] Kawamuro, K., A Rohlin property for one-parameter automorphism groups of the hyperfinite II_1 factor, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **36** (2000), 641–657.
- [8] Kishimoto, A., A Rohlin property for one-parameter automorphism groups, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 599–622.
- [9] Masuda, Toshihiko, Unified approach to classification of actions of amenable discrete groups on injective factors, to appear in *J. Reine Angew Math.*, *arXiv:1006.1176*.
- [10] Masuda, T., Tomatsu, R., Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual, *Comm. Math. Phys.* **274** (2007), 487–551.
- [11] Masuda, T., Tomatsu, R., Classification of minimal actions of a compact Kac algebra with amenable dual on injective factors of type III, *J. Funct. Anal.* **258** (2010), 1965–2025.
- [12] Masuda, T., Tomatsu, R., Rohlin flows on von Neumann algebras, *math.OA/1206.0955*.
- [13] Shimada, K., Rohlin Flows on Amalgamated Free Product Factors, *math.OA/1212.3049*.
- [14] Tomatsu, R., Amenable discrete quantum groups, *J. Math. Soc. Japan* **58** (2006), 949–964.
- [15] Tomatsu, R., A characterization of right coideals of quotient type and its application to classification of Poisson boundaries, *Comm. Math. Phys.* **275** (2007), 271–296.
- [16] Tomatsu, R., work in progress.