

基礎数学D レポート10 解答

答え 極方程式の形にすると,

$$r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$$

である. これをよく検討すると, 第一象限でぐるっと回転して交わっていることが分かる. よって求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} \frac{r(\theta)^2}{2} d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{(1 + \tan^3 \theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

$t = \tan \theta$ と変換すると, t は 0 から ∞ まで動く. また $dt = d\theta / \cos^2 \theta$ だから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{9}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{9}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^3} \right)' \cdot \frac{-1}{3} dt \\ &= \frac{-3}{2} \left[\frac{1}{1+t^3} \right]_0^\infty = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$