

基礎数学D レポート11 解答

答え (1). 速度ベクトルは $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ である. また $\cos t \sin t$ の一周積分は0である.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} (P, Q) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \sin^2 t \cdot \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^4 t dt = -3\pi/4.\end{aligned}$$

(2). $-P_y + Q_x = -1 + y^2$ であるから

$$\int_R (-1 + y^2) dx dy$$

を計算すればよい. 極座標変換すると $dx dy = r dr d\theta$ だから

$$\begin{aligned}\int_R (-1 + y^2) dx dy &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (-1 + r^2 \sin^2 \theta) r \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (-r) + \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta r^3 \sin^2 \theta \\ &= -\pi + \pi/4 = -3\pi/4.\end{aligned}$$