基礎数学 D レポート 12 解答

答え　球を $x+y+z=0$ で切ると，半径 1 中心 (0,0,0) の円ができる．この円板を S とする．法線ベクトル n は平面の方程式の係数を読み取って

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

と分かる．円周部分は後でパラメトライズを行う．

ベクトル場 $F=(y,z,x)$ の回転は $\operatorname{rot} F = (-1,-1,-1)$ と計算できる．よって $\operatorname{rot} F \cdot n = -\sqrt{3}$ である．

円板 S とその境界 C についてストークスの定理を使うと，等式

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, ds$$

が成り立つはずである．

● 右辺について．

$$\int_S -\sqrt{3}\, ds = -\sqrt{3}\int_S ds$$

1 の面積分は，S の面積が出るので π である．よって右辺の値は $-\sqrt{3}\pi$. (今は運良く $F\cdot n$ が定数になったが，一般には関数の面積分を求めなくてはならない．その場合は S をパラメトライズする必要がある．後述参考.)

● 左辺について．円周 C をパラメトライズする．直交座標系を適当に取ればよい．まず C 上の点をどこでもいいので取る．たとえば $e := (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ は C 上にある．またちょうど中心が原点なので，これを第一座標軸とする．次に第二座標軸をとりたい．n をちょうど第三座標軸にしたいので，第二座標軸は $f := n \times e$ とすればよい．まとめると，

$$\begin{aligned} e &= (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \\ f &= (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

よって C は，

$$\gamma(\theta) = \cos\theta e + \sin\theta f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{pmatrix}, \quad 0 \le 2\pi \le 2\pi.$$

とパラメトライズできる．速度ベクトルは

$$\gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．また，F は点 $\gamma(\theta) \in C$ において

$$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる．

よって線積分は

$$\int_C ydx + zdy + xdz = \int_0^{2\pi} F \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta$$

を計算すればよい．$[0, 2\pi]$ で積分するから，被積分関数に $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の積が出てくると直交性から 0 である．また $\cos^2\theta$ や $\sin^2\theta$ の積分は π である．これを利用して計算してみると，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} F \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta,\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta \Big) \\
&\quad \cdot \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta,\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta \Big)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{\sqrt{12}}\cos^2\theta - \frac{1}{\sqrt{12}}\sin^2\theta - \frac{2}{\sqrt{12}}\sin^2\theta - \frac{2}{\sqrt{12}}\cos^2\theta \Big)\, d\theta \\
&= -\frac{6}{\sqrt{12}}\pi = -\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}$$

以上のようにストークスの定理を確かめられる．ポイントは，計算を楽にするために「上手く」パラメトライズしてやることである．

最後に S の面積要素について，写像 $P\colon U \to S$ を次のように定めてやる．U は uv 平面の半径 1 中心 $(0, 0)$ の円板で，

$$P(u, v) = ue + vf = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}v \end{pmatrix}.$$

$u = \cos\theta$, $v = \sin\theta$ とおいたものが $\gamma(\theta)$ である．この写像は円板を S に伸縮無しで写したものだから当然 $ds = dudv$ のはずである．接ベクトルを計算して実際に確かめてみよう．

$$P_u = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \quad P_v = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$$

だから，

$$P_u \times P_v = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = n$$

となって，$\|P_u \times P_v\| = 1$ だから確かに $ds = dudv$ である．

よって一般に f を S 上の関数とすれば，

$$\int_S f\, ds = \int_U f(P(u, v))\, dudv$$

となる．後者は極座標変換を使うなどして，累次積分に持ち込んで計算することができる．

原点を通らない平面で切った場合も考えてみるとよい．