基礎数学D レポート2 解答例

答え 1 A_i は有界なので, 正数 C_i を

$$\|x\| \leq C_i \quad \text{for all } x \in A_i$$

となるように取れる.

$$C := \max\{C_1, \dots, C_m\}$$

とおく.

点 $x \in A_1 \cup \dots \cup A_m$ を取る. するとある i があって, $x \in A_i$ である. このとき $\|x\| \leq C_i \leq C$ である.

よって全ての $x \in A_1 \cup \dots \cup A_m$ についてノルム $\|x\|$ を C で押さえられたので, その合併は有界である.

答え 2 (その1) $K := K_1 \cup \dots \cup K_m$ とおく. K が有界閉集合であることを示す. 各 K_i はコンパクトだから有界閉. 問題1から K は有界である. また閉集合たちの有限個の合併は閉集合であるから, K は閉集合. よって K は有界閉集合だから, コンパクトである.

(その2) K の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を取る. つまり各 U_λ は開集合であり,

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

すると $K_i \subset K$ より $K_i \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ でもあり, K_i はコンパクトであるから, ある有限集合 $F_i \subset \Lambda$ が存在して,

$$K_i \subset \bigcup_{\lambda \in F_i} U_\lambda.$$

すると

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in F_1 \cup \dots \cup F_m} U_\lambda$$

である. $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の有限個のメンバーからなる K の開被覆を取り出せたので, K はコンパクト.

(その3) K は点列コンパクトであることを示す. K 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ を取る. するとある K_i に, x_n は無限回ヒットする. 実際 K_i にヒットする番号の集合

$$A_i := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K_i\}$$

とすれば, x_n はどれかの K_i に入るのだから,

$$\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

左辺は無限集合であり, 右辺は有限個の集合の合併. よってどれかの A_i は無限集合でなくてはならない.

A_i が無限であったとする. $A_i = \{n_1, n_2, \dots\}$ と小さい順にならべてみると, $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$ は K_i の中に属している x_n の部分列である.

そこで K_i のコンパクト性を使うと, さらにその部分列を選んで収束させることができる. もちろんその極限は K_i に入っているから, K に入っている.

以上より K は点列コンパクトである.