基礎数学D レポート5 解答

答え 1

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + xy - y^2$$

の停留点を求める．偏微分は

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2x + y, \quad f_y(x,y) = 3y^2 + x - 2y$$

となるから，$3x^2 - 2x + y = 0$ を使って第二式から y を消去すると，

$$0 = x(3x^3 - 12x^2 + 6x - 1) = x(3x - 1)(3x^2 - 3x + 1).$$

このうち $3x^2 - 3x + 1$ は実数解を持たないから，解は $x = 0, 1/3$．これらに応じて，$y = 0, 1/3$ と求まる．

従って停留点は 2 点あり，$(0,0)$ と $(1/3, 1/3)$.

次に Hessian を求めると，

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x-2 & 1 \\ 1 & 6y-2 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H(1/3,1/3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

前者の主小行列式は $D_1 = -2 < 0$, $D_2 = 3 > 0$ だから負定値行列.

よって $(0,0)$ は狭義の極大点で極大値は 0.

後者の主小行列式は $D_1 = 0$, $D_2 = -1$ である．$D_1 = 0$ だから正定値でも負定値でもない．しかし $D_2 = \det H(1/3,1/3) = -1$ で 0 ではないから，各固有値は 0 ではない．しかも 2×2 行列を考えているので，固有値の個数は 2 個であり，かけたら負になるのだから，固有値は正，負となっている．

つまり $(1/3,1/3)$ は峠点であり，値は $-1/27$.

答え 2

$$g(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx - 2xy$$

の停留点を求める．

$$g_x = 4x - 2y + 4z, \quad g_y = -2x + 10y - 2z, \quad g_z = 4x - 2y + 4z.$$

これらをすべて 0 とおいて，連立方程式を解くと，$x = -z$, $y = 0$ と求まる．よって停留点は $(t, 0, -t)$ と書けて無限個ある．また $g(t,0,-t) = 0$ である．

次に Hessian を求めると

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となり，この場合は x, y, z によらない．主小行列式は $D_1 = 4 > 0$, $D_2 = 36 > 0$, $D_3 = 0$ となるから，正定値でも負定値でもない．しかも $D_3 = \det H = 0$ だから，固有値の内に 0 が入っている．もっと考えなくてはならない．

そこで $g(x, y, z)$ は 2 次形式であることに気をつけて，

$$g(x,y,z) = \left\langle H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表す．対称行列 H の固有値の情報を調べよう．固有方程式を解くと，固有値は 0 と $(9 \pm 2\sqrt{2})/2 > 0$ の 3 つである．特に H は正定値ではないが，半正定値である．

よって上の内積は 0 以上，つまり $g(x, y, z) \geq 0$ がすべての点 (x, y, z) で成り立つ．とくに 0 は最小値である．

まとめると，g は点 $(t, 0, -t)$ で最小値 0 を取る (t は任意の実数)．この極小値は狭義ではない．実際 $(1, 0, -1)$ の方向にずっと 0 が続いている．