基礎数学 D レポート 7 解答

答え 1 $f(x), g(x)$ を次式で定義する．

$$f(x) = \|x-\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha_i)^2, \quad g(x) = a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b.$$

もちろん定義域 D は $\mathbb{R}^n$ とする．

まず g の停留点を確認しよう．$g_{x_i} = a_i$ であり，$a_1, \ldots, a_n$ はすべてが 0 にならないことを仮定しているから，g には停留点がない．

したがってラグランジュの未定乗数法により，

$$\Phi(x,\lambda) := f(x) - \lambda g(x)$$

の停留点を探すことになる．

$$\Phi_{x_i} = 2(x_i-\alpha_i) - \lambda a_i, \quad \Phi_\lambda = -g(x)$$

より，停留点の方程式は,

$$\begin{cases} x_i = (\lambda/2)a_i + \alpha_i, \\ a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b = 0. \end{cases}$$

これより,

$$\lambda = \frac{2(-b-\sum_i a_i\alpha_i)}{\sum_i a_i^2}, \quad x_j = \alpha_j + \frac{a_j(-b-\sum_i a_i\alpha_i)}{\sum_i a_i^2}$$

だから

$$f(x) = \sum_i (x_i-\alpha_i)^2 = \sum_i (\lambda^2/4)a_i^2 = \frac{(-b-\sum_i a_i\alpha_i)^2}{\sum_i a_i^2}.$$

これが実際に最小値になることを示すには次のようにするとよい．上で求めた L の点を x^o と書く．また $\beta := f(x^o)$ と書く．今,

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \le \beta+1\}$$

という集合を考えよう．K の各点は α からの距離が $\sqrt{\beta+1}$ 以下だから，K は有界集合．また f が連続関数なので K は閉集合．よって K はコンパクト集合である．また $x^o \in K \cap L$ であることに注意しよう．

さて，任意の $x \in L$ に対して $f(x) \ge \beta$ であることを示そう．まず $x \in K^c \cap L$ のときは，$f(x) > \beta+1$ だから明らか．

次に $x \in K \cap L$ のときを考える．$K \cap L$ はコンパクト集合だから f は $K \cap L$ で最小値をもつ．ところで $K \cap L$ にある最小点は ∂K には乗らない．ここで境界 ∂K は

$$\partial K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = \beta+1\}.$$

実際に境界上で f の値は $\beta+1$．しかし我々の議論で $f(x^o) = \beta$ となるからである．よって $f(x)$ の L 上での最小点は $\mathrm{int}K \cap L$ に属することが分かった．ここで,

$$\mathrm{int}K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) < \beta+1\}.$$

なので始めから定義域をここに絞っておけば，最小点があるから，とくに極値点が存在．つまり int$K$ において，ラグランジュの未定乗数法の解があるが，これは先ほどの議論と同じで，一意的に定まっていた x^o が出てくる．よって $f(x^o)$ が最小．最小距離は平方根をとった，

$$\frac{|a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}.$$