

基礎数学 D 中間試験 解答例

答え 1

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

の停留点を求める．偏微分は

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

となるから $f_x = f_y = 0$ を解くと，停留点は 2 点 $(0, 0)$ と $(1, 1)$ であることが分かる．次にヘッセ行列を求める．

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

したがって

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

前者の主小行列式は $D_1 = 0$, $D_2 = -9 > 0$. 特に $D_2 < 0$ より，固有値に正負が混じる (実際 ± 3 が固有値). よって $(0, 0)$ は峠点であり， $f(0, 0) = 0$.

後者の主小行列式は $D_1 = 6$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$ だから $H(1, 1)$ は正定値. よって $(1, 1)$ は狭義の極小点であり， $f(1, 1) = -1$.

答え 2 (1). $f(x, y) := x^2 + y^2$, $g(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$ と書く．それぞれの定義域は $\mathbb{R}^2$ とする．

束縛条件 $g(x, y) = 0$ のもとでラグランジュの未定乗数法を使う．

Case 1. g の停留点 (x, y) で $g(x, y) = 0$ となるものがあるかを調べる．

g の停留点は問題 1 で分かっている， $(0, 0)$, $(1, 1)$. 計算すると $g(0, 0) = 0$, $g(1, 1) = -1 \neq 0$ だから， $(0, 0)$ のみ束縛条件をみたす曲線上にある．このとき $f(0, 0) = 0$ であり， $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ が任意の (x, y) で成立するから， $(0, 0)$ で最小値 $f(0, 0) = 0$ をとる．

Case 2. Case 1 以外の候補を探す．

3 変数関数 $\Phi(x, y, \lambda)$ を

$$\Phi(x, y, \lambda) := f - \lambda g = x^2 + y^2 - \lambda(x^3 + y^3 - 3xy)$$

と定める．この関数の停留点を探すために微分すると，

$$\begin{aligned} \Phi_x &= 2x - 3\lambda x^2 + 3\lambda y, \\ \Phi_y &= 2y - 3\lambda y^2 + 3\lambda x, \\ \Phi_\lambda &= -(x^3 + y^3 - 3xy). \end{aligned}$$

だから、次の連立方程式の解 (x, y, λ) が Φ の停留点である.

$$\begin{cases} 2x - 3\lambda x^2 + 3\lambda y = 0 \\ 2y - 3\lambda y^2 + 3\lambda x = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

いろいろな解き方があるが、ここではこれらが x, y について対称であることを利用しよう. このときは $s := x + y$ と $t := xy$ を求めることを目標とするとよい.

(第1式)−(第2式):

$$2(x - y) - 3\lambda(x^2 - y^2) + 3\lambda(y - x) = 0. \quad (1.2)$$

$x - y$ を共通因子として含むから割ってみる. このとき2つのケースに分かれる.

Case 2-1. $x - y \neq 0$ のとき.

このときは (1.2) の両辺を $x - y$ で割ることができ,

$$2 - 3\lambda(x + y) - 3\lambda = 0.$$

次に λ で割りたい. 仮に $\lambda = 0$ であれば左辺 = 2 だから矛盾. よって $\lambda \neq 0$ であり, 上の等式を整理すると,

$$x + y = -1 + \frac{2}{3\lambda} \quad (1.3)$$

となる. 次に xy を求めたい. (1.1) において (第1式)+(第2式) を計算すると,

$$2(x + y) - 3\lambda(x^2 + y^2) + 3\lambda(x + y) = 0$$

となるから,

$$x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{2}{3\lambda}\right)(x + y) = -1 + \frac{4}{9\lambda^2} \quad \text{by (1.3).}$$

よって

$$2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2 = \left(-1 + \frac{2}{3\lambda}\right)^2 - \left(-1 + \frac{4}{9\lambda^2}\right) = 2 - \frac{4}{3\lambda},$$

つまり

$$xy = 1 - \frac{2}{3\lambda}. \quad (1.4)$$

ここで $\alpha := 1 - 2/3\lambda$ とおけば, (1.3) と (1.4) により, $x + y = -\alpha$, $xy = \alpha$. そこで $0 = x^3 + y^3 - 3xy$ だから,

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 3xy \\ &= -\alpha^3 - 3\alpha(-\alpha) - 3\alpha = \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 3). \end{aligned}$$

$-\alpha^2 + 3\alpha - 3$ の判別式は $9 - 12 = -3 < 0$ より, 上の式の解は $\alpha = 0$ のみ. これは $x = y = 0$ に相当する.

まとめると Case 2-1 からは新しい候補点が出てこない.

Case 2-2. $x - y = 0$ のとき.

このときは連立方程式 (1.1) は

$$\begin{cases} (2 - 3\lambda)x - 3\lambda x^2 = 0 \\ 2x^3 - 3x^2 = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

となる. 第2式の解は $x = 0, 3/2$. この $x = 0$ のときは $y = 0$ だから, Case 1 に帰着. よって $x = 3/2 = y$ のときが解になりうる. 実際第1式に代入すれば, $\lambda = 4/3$ と解ける.

以上の議論から, 極値の候補点は $(x, y) = (0, 0), (3/2, 3/2)$ の2点.

(2). 点 $(0, 0)$ が $g = 0$ の元での f の最小値であることはすでに言った. 点 $(3/2, 3/2)$ について考える.

点 $(3/2, 3/2)$ は曲線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ の上に乗っているのであった. この曲線の点 $(3/2, 3/2)$ の近くの様子を調べるために, 陰関数定理を利用して x か y について解きたい. ここでは y について解いてみよう. そのために $g_y(x, y) = 3y^2 - 3x$ に $(x, y) = (3/2, 3/2)$ を代入してみると $g_y(3/2, 3/2) = 9/4$ となり, 0 でない.

よって陰関数定理により, $g(x, y) = 0$ は点 $(3/2, 3/2)$ の近くで y について解ける. $y = \varphi(x)$ と書こう. もちろん変数 x は $3/2$ の近くを動き, $\varphi(3/2) = 3/2$ である. 以下目標は $\varphi'(3/2)$ と $\varphi''(3/2)$ を求めることである.

等式 $0 = g(x, \varphi(x)) = x^3 + \varphi(x)^3 - 3x\varphi(x)$ が, $3/2$ の近くのすべての x についてなりたつのだから ($x \in (3/2 - \varepsilon, 3/2 + \varepsilon)$ での恒等式), 両辺を x で微分してよい. すると,

$$3x^2 + 3\varphi^2\varphi' - 3\varphi - 3x\varphi' = 0 \quad (1.6)$$

より, $x = 3/2$, $\varphi(3/2) = 3/2$ を代入して $\varphi'(3/2) = -1$ を得る.

次に (1.6) の両辺を 3 で割ってから, もう一度微分すると,

$$2x + 2\varphi\varphi' + \varphi^2\varphi'' - 2\varphi' - x\varphi'' = 0$$

ここに $x = 3/2$, $\varphi(3/2) = 3/2$, $\varphi'(3/2) = -1$ を代入すると, $\varphi''(3/2) = -8/3$ を得る.

さて, 目標は $f(x, y) = x^2 + y^2$ の $g(x, y) = 0$ 状況下での極値問題を解くことであつた. 我々はその候補点を Lagrange の未定乗数法により, $(3/2, 3/2)$ と絞っている. この近くでは $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ なので, $h(x) := f(x, \varphi(x)) = x^2 + \varphi(x)^2$ が, x の関数として $x = 3/2$ で極値をとるのかどうか調べればよい.

まず $h'(x) = 2x + 2\varphi(x)\varphi'(x)$ である. もちろん $h'(3/2) = 0$ となる (Lagrange の未定乗数法の導き方から必然的にこうなる).

次に $h''(x) = 2 + 2\varphi'(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)$ より, $h''(3/2) = 2 + 2 + 2 \cdot (3/2) \cdot (-8/3) = -4 < 0$ より, $h(x)$ は $x = 3/2$ で極大値 $h(3/2) = 9/2$ をとる.

以上まとめると, $(0, 0)$ で極小値 $f(0, 0) = 0$, $(3/2, 3/2)$ で極大値 $f(3/2, 3/2) = 9/2$ をとる.

答え 3 (1). $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $g(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$ とおく. それぞれの定義域は $\mathbb{R}^3$ とする. x, y, z を $-x, -y, -z$ と変換しても, $g = 0$ の等式, f の値は変わらない. また, x, y, z を置換しても同じ性質をもつ. よって $0 \leq x \leq y \leq z$ としよ.

(2). まず g の停留点が $g = 0$ をみたすかどうかを確認する. $g_x = 4x^3$, $g_y = 4y^3$, $g_z = 4z^3$ だから g の停留点は $(0, 0, 0)$ の 1 つ. すると $g(0, 0, 0) = -1 \neq 0$ だから, $g = 0$ をみたさない. よって g の停留点は極値の候補から除外される.

次に, 4 変数関数 $\Phi(x, y, z, \lambda)$ を次のように定義する.

$$\Phi(x, y, z, \lambda) := f - \lambda g = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^4 + y^4 + z^4 - 1).$$

Φ の停留点を求めよう. Φ の各微分は次のように求まる.

$$\begin{aligned}\Phi_x &= 2x - 4\lambda x^3, \\ \Phi_y &= 2y - 4\lambda y^3, \\ \Phi_z &= 2z - 4\lambda z^3, \\ \Phi_\lambda &= -(x^4 + y^4 + z^4 - 1).\end{aligned}$$

これらをすべて 0 とおいて解く. まず第 3 式に注目すると, $2z(1 - 2\lambda z^2) = 0$ である. $z = 0$ か, あるいは $2\lambda z^2 = 1$. 後者は $\lambda \neq 0$ のときであり, $z = 1/\sqrt{2\lambda}$ である ($z \geq 0$ で解くことにしたから).

もし $z = 0$ ならば $0 \leq x \leq y \leq z$ だから, $x = y = z = 0$ である. しかしこのときは, どの λ に対しても $\Phi_\lambda(0, 0, 0, \lambda) = 1$ だから, 第 4 式 $= 0$ とはならないので不適.

$z \neq 0$ ならば, $z = 1/\sqrt{2\lambda}$ が解である. 次に y についても同じ方程式がなりたち, $y = 0$ か $1/\sqrt{2\lambda}$. また x についても同じであるから, まとめると第 1, 2, 3 式から次の解を得る.

$$(x, y, z) = (0, 0, 1/\sqrt{2\lambda}), (0, 1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{2\lambda}), (1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{2\lambda}, 1/\sqrt{2\lambda}).$$

これらを $\Phi_\lambda = 0$ の式に代入し λ を求めることができる. 結果的に

$$(x, y, z) = (0, 0, 1), (0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4}), (3^{-1/4}, 3^{-1/4}, 3^{-1/4})$$

の 3 つが候補であることが分かる.

(3). そこで $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の値を調べてみると,

$$f(0, 0, 1) = 1, f(0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = \sqrt{2}, f(3^{-1/4}, 3^{-1/4}, 3^{-1/4}) = \sqrt{3}.$$

さて, (x, y, z) は $K := \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ の上を動く. これは明らかに有界かつ閉集合である. また明らかに f は連続関数だから, f は K 上で最大, 最小をとる. もちろんそれらは極大, 極小であるから, (2) でもとめた候補点のうちに入っている.

一番大きいのが $\sqrt{3}$ であり, 一番小さいのが 1 である. よって, $(0, 0, 1)$ は極小点, $(3^{-1/4}, 3^{-1/4}, 3^{-1/4})$ は極大点である.

さて点 $(0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ が極値点かどうか調べよう. 問題 2 と同じくヘッセ行列による判定法に持ち込みたいので, $g(x, y, z) = 0$ のどれかの変数について解きたい. こ

の場合 $g_z = 4z^3$ だから, $g_z(0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = 4 \cdot 2^{-3/4} \neq 0$ なので, 点 $(0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ の近くで, $g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x, y)$ と解ける. よって極値問題は, 束縛条件なしの $h(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y))$ の解析に変わった. ここで (x, y) は $(0, 2^{-1/4})$ の近くを動く.

次に $(0, 2^{-1/4})$ での微分の値 φ_x 等を調べよう. 何が必要になるのかを把握するために, h のヘッセ行列を先に求めておこう.

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + \varphi(x, y)^2.$$

だから, $h_x = 2x + 2\varphi\varphi_x$, $h_y = 2y + 2\varphi\varphi_y$ である. よって

$$H = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2\varphi_x^2 + 2\varphi\varphi_{xx} & 2\varphi_x\varphi_y + 2\varphi\varphi_{xy} \\ 2\varphi_x\varphi_y + 2\varphi\varphi_{xy} & 2 + 2\varphi_y^2 + 2\varphi\varphi_{yy} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

よって $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$ を調べよう. まず, $(x, y) = (0, 2^{-1/4})$ の近くでの恒等式

$$x^4 + y^4 + \varphi(x, y)^4 = 1 \quad (1.8)$$

を微分していこう. まず x で微分して

$$4x^3 + 4\varphi^3\varphi_x = 0.$$

4 で割れば

$$x^3 + \varphi^3\varphi_x = 0 \quad (1.9)$$

を得る. これに $(x, y) = (0, 2^{-1/4})$ を代入して $(\varphi(0, 2^{-1/4}) = 2^{-1/4})$,

$$\varphi_x(0, 2^{-1/4}) = 0$$

が分かる. さらに (1.9) を x で微分して,

$$3x^2 + 3\varphi^2\varphi_x^2 + \varphi^3\varphi_{xx} = 0.$$

ここに $x = 0$, $\varphi(0, 2^{-1/4}) = 2^{-1/4}$, $\varphi_x(0, 2^{-1/4}) = 0$ を代入して解くと,

$$\varphi_{xx}(0, 2^{-1/4}) = 0$$

が分かる. また, (1.9) を y で微分すると,

$$3\varphi^2\varphi_y\varphi_x + \varphi^3\varphi_{xy} = 0.$$

$\varphi_x(0, 2^{-1/4}) = 0$ を代入すると,

$$\varphi_{xy}(0, 2^{-1/4}) = 0$$

が分かる.

次に, (1.8) を y で微分し 4 で割ると,

$$y^3 + \varphi^3\varphi_y = 0 \quad (1.10)$$

を得る． $y = 2^{-1/4}$, $\varphi = 2^{-1/4}$ を代入すると,

$$\varphi_y(0, 2^{-1/4}) = -1.$$

(1.10) の両辺 y で微分すると,

$$3y^2 + 3\varphi^2\varphi_y^2 + \varphi^3\varphi_{yy} = 0.$$

これまで調べてきた値を代入すると,

$$\varphi_{yy}(0, 2^{-1/4}) = -3 \cdot 2^{5/4}.$$

以上のデータを (1.7) に代入すると, h の $(0, 2^{1/4})$ でのヘッセ行列が次のように求まる．

$$H(0, 2^{1/4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

よって $(0, 2^{1/4})$ は h の峠点である．

まとめると, $(0, 0, 1)$ で極小値 1 , $(3^{-1/4}, 3^{-1/4}, 3^{-1/4})$ で極大値 $\sqrt{3}$, $(0, 2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ は峠点で値は $\sqrt{2}$.