基礎数学 D 中間試験 (2013/11/22)

問題 1 (10 点) 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値問題を解け. ただし定義域は $\mathbb{R}^2$ とする.

問題 2 (5 点+10 点) 条件 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ のもとで, $x^2 + y^2$ の極値を以下の手順で求めよ.

- (1) ラグランジュの未定乗数法を用いて極値点の候補を探せ (Hint: 2 つある).
- (2) (1) で得られた候補点が極値点かどうかを判定せよ.

問題 3 (5 点+10 点+10 点) 条件 $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ のもとで, $x^2 + y^2 + z^2$ の極値問題を以下の要領で解け. (注: $r := x^2, s := y^2, t := z^2$ と変換して解かないでください!)

- (1) この場合の極値問題は, $x, y, z \geq 0$ かつ $x \leq y \leq z$ の範囲で解けばよいことを簡単に説明せよ. 以下の問はこの範囲で解くことにする.
- (2) ラグランジュ未定乗数法を用いて極値点の候補を求めよ (Hint: 3 つある).
- (3) (2) の候補の点を吟味して極値点と極値を求めよ. (Hint: $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ を満たす点の集合がコンパクトであることを使えば, 3 つあるうちの 2 つは最大点, 最小点であることが分かる. 残り 1 つは陰関数定理と, サイズが 2×2 のヘッセ行列を用いて調べるとよい.)

注意:

各種定理 (たとえば陰関数定理など) を用いるときは, 定理成立の前提条件が満たされていることをはっきりと述べて下さい. そうしなければ減点します.

特にラグランジュ未定乗数法は 2 つの主張から成り立っていることを認識しておくこと.

ただし, 与えられた関数が C^r 級だということはチェックしなくてもいいです. 問題に出ている関数がすべて C^∞ 級であることは明らかなので.

また極値問題を解くときは, 極大, 極小, 峠点, それらではない, の 4 つのうちどれにあたるかを述べ, 値も調べること.