修士論文

可分 C^* 環の純粋状態空間の等質性

奥村　昂輝

2015.3

北海道大学大学院理学院
数学専攻博士前期課程

可分 C* 環の純粋状態空間の等質性

奥村　昂輝

目次

1 Introduction

本論文は, A. Kishimoto–N. Ozawa–S. Sakai の Homogeneity of the pure state space of a separable C*-algebra ([11]) について再考し, まとめたものである. 原論文では簡単な場合のみ証明をしている部分や証明を省略している部分がある. 例えば, 原論文の Theorem 3.1（本論文の Theorem 4.1）では, $L_{\xi_\omega} \perp L_\eta$ かつ $\langle \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega, \pi_\omega(x_j^*)\xi_\omega \rangle = \langle \pi_\omega(x_i^*)\eta, \pi_\omega(x_j^*)\eta \rangle$ という場合についてのみ証明が与えられている. これに対し本論文では, 一般の場合についても証明をつけた. また, その他で非自明なものにもほとんど全て証明をつけた.

主定理について説明する. C*-algebra 上には pure state と呼ばれる関数が定義できる. state τ が *pure state*（純粋状態）であるとは, もし positive linear functional ρ が $\rho \leq \tau$ を満たすならば, ある $t \in [0,1]$ で $\rho = t\tau$ となるものが取れるものである. [11] の主定理は,

Theorem 1.1 (Main Theorem)**.** A を separable C*-algebra とする. $\ker \pi_{\omega_1} = \ker \pi_{\omega_2}$ なる任意の $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{PS}(A)$ に対し, ある $\alpha \in \mathrm{AInn}(A)$ が存在して, $\omega_1 \circ \alpha = \omega_2$ を満たす.

というものである. ただし, $\mathrm{PS}(A) := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ is a pure state}\}$ とし, $\mathrm{AInn}(A) := \{\alpha \in \mathrm{Aut}(A) \mid \alpha \text{ is an asymptotically inner of } A\}$ とする (Definition 2.5). つまりこの主定理は, とても広いクラスの作用素環に対して, GNS 表現の kernel が同じ 2 つの pure state は, ある自己同型を通して同一視できる, というものである.

この定理を示すために, 次の性質を挙げる.

Property 1.2. 任意の $F \Subset A$, $\pi_\omega(A) \cap K(H_\omega) = \{0\}$ なる $\omega \in \mathrm{PS}(A)$, $\varepsilon > 0$ に対し, ある $G \Subset A$, $\delta > 0$ が存在して, 以下を満たす.

もし, $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ が $\pi_\varphi \overset{q}{\sim} \pi_\omega$, $|\varphi(x) - \omega(x)| < \delta$, $x \in G$ を満たすならば, ある $(u_t)_{t\in[0,1]} \subset U(A)$ で t に関して連続で, $u_0 = 1$, $\varphi = \omega \circ \mathrm{Ad}\, u_1$,

$$\|\mathrm{Ad}\, u_t(x) - x\| < \varepsilon, \quad x \in F,\ t \in [0,1]$$

を満たすものが存在する. ただし, $\overset{q}{\sim}$ は quasi-equivalence を, $K(H_\omega)$ は H_ω 上の compact operators を表すものとする.

まず初めに, Property 1.2 を満たす C*-algebra は, Theorem 1.1 を満たすことを示す. また, もう 1 つ次の性質を挙げる.

Property 1.3. 任意の $F \Subset A$, A の irreducible representation $\pi\colon A \to B(H)$, H 上の finite rank projection E, $\varepsilon > 0$ に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ と, ある $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M_{1,n}(A)$ が存在して, $\|xx^*\| \le 1$, $\pi(xx^*)E = E$, $\|\mathrm{ad}\, a\, \mathrm{Ad}\, x\| < \varepsilon$, $a \in F$ を満たす. ただし, $\mathrm{ad}\, a(b) := ab - ba$, $b \in A$, $(\mathrm{Ad}\, x)(b) := \sum_{i=1}^n x_i b x_i^*$, $b \in A$ とする.

次に, Property 1.3 を満たす C*-algebra は, Property 1.2 を満たすことを示す. そして最後に U. Haagerup の結果 ([8, Theorem 2.1]) を使って, 任意の separable C*-algebra が Property 1.3 を満たすことを示す.

歴史的には, この定理の元となった結果は R. T. Powers の結果である. Powers の結果は次のものである. ([14, Theorem 2.7])

Theorem (Powers)**.** M_n を n 次行列環とし, $\{m_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ を増大列とする. A を M_{m_n} によって生成される UHF algebra とする. $i = 1, 2$ に対し, $\pi_i\colon A \to B(H_i)$ を factor representation とし, $\xi_i \in H_i$ に対し, $\omega_i(x) := \langle \pi_i(x)\xi_i, \xi_i \rangle$ とする. このとき, 次は同値である.

(1) $\pi_1 \overset{q}{\sim} \pi_2$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\|\omega_1|_{M_{m_n}^c} - \omega_2|_{M_{m_n}^c}\| < \varepsilon$.

ただし, M^c は M の A での relative commutant を表す.

Powers は, 行列環の増大列によって生成される UHF algebra という C*-algebra と, vector state と呼ばれる代表的な pure state について研究を行った. 次に O. Bratteli [2, Theorem 4.5] によって Powers の結果が AF algebra 上でも成り立つことが示され, Bratteli–Kishimoto [3, Theorem 6] らによって Powers の結果が Cuntz algebra 上でも成り立つことがわかった.

更に H. Futamura–N. Kataoka–A. Kishimoto によって, 本論文の主定理の形での主張が, 非常に広いクラスの simple separable nuclear C*-algebra 上の pure state に対して成立することが示された. Futamura–Kataoka–Kishimoto は, C*-algebra における, ある性質 ([7, Property 2.9], 本論文では Property 1.2) を見つけ出し, Futamura–Kataoka–Kishimoto は, Property 1.2 を満たす C*-algebra については主定理が成り立つことを導いた. そして, 離散従順群の Group C*-algebra や, purely infinite C*-algebra などの様々な C*-algebra が Property 1.2 を満たすことを示し, その結果として, それらの C*-algebra について主定理が成り立つことを導いた. そして最後に Kishimoto–Ozawa–Sakai によって, 任意の separable C*-algebra が Property 1.2 を満たすことがわかり, 主定理が成り立つことが導かれた.

本論文の構成を述べる. 第 2 章では, 本論文を読むために必要な Notation や, 定義, 基本的な定理について紹介する. Kadison's Transitivity (Theorem 2.13) については, ノルム評価付きのものが後の章で必要となるので, 証明もつけた. 第 3 章では, Property 1.2 を満たす C*-algebra は, Theorem 1.1 を満たすことを示す. 第 4 章では, Property 1.3 を満たす C*-algebra は, Property 1.2 を満たすことを示す. 先にも述べたが, Theorem 4.1 について, 一般の場合についても証明をつけた. 最後に第 5 章では, 任意の separable C*-algebra は, Property 1.3 を満たすことを示す. 第 5 章では, 非自明な主張（Lemma 5.10）についても証明をつけた.

2 Preliminary

2.1 Notation

A を C*-algebra, H を Hilbert space, $r > 0$ とする.

- $B(H) := \{a\colon H \to H \mid a \text{ is a bounded linear operator}\}$
- $K(H) := \{a \in B(H) \mid a \text{ is a compact operator}\}$
- $A_{sa} := \{a \in A \mid a \text{ is self-adjoint}\}$
- $U(A) := \{u \in A \mid u \text{ is a unitary}\}$
- $\mathrm{Aut}(A) := \{\alpha\colon A \to A \mid \alpha \text{ is a } *\text{-isomorphism}\}$
- $\mathrm{S}(A) := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ is a state}\}$
- $\mathrm{PS}(A) := \{\varphi \in A^* \mid \varphi \text{ is a pure state}\}$
- $\sharp A$ は, A の濃度を表すものとする.
- $A \odot A$ は, A の代数的テンソル積を表すものとする.
- $\sigma(A, A^*)$-topology は, A に A^* から誘導される weak topology を表すものとする.
- $\sigma(A^{**}, A^*)$-topology は, A^{**} に A^* から誘導される weak* topology を表すものとする.

  $a, b \in A$, $\varepsilon > 0$ に対し,
- $\mathrm{Sp}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \text{ is not invertible}\}$
- $\mathrm{ad}\, a(b) := ab - ba$
- $\mathrm{Ad}\, a(b) := aba^*$
- $a \overset{\varepsilon}{\approx} b \overset{\text{defn}}{\iff} \|a - b\| < \varepsilon$

  $F \subset A$ に対し,
- $F \Subset A \iff F$ は, A の finite subset である.
- $\mathrm{co}\, F := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ t_1, t_2, \cdots, t_n \geq 0,\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in F \right\}$

- $\overline{F}^n$ は, F の A における norm-closure を表すものとする.
- $\overline{F}^w$ は, F の A における weak-closure を表すものとする.

  $\xi, \eta, \zeta \in H$, $\varepsilon > 0$ に対し,

- $\theta_{\xi,\eta} \in H^*$ を $\theta_{\xi,\eta}(\zeta) := \langle \zeta, \eta \rangle \xi$ とする.
- $\xi \overset{\varepsilon}{\approx} \eta \overset{\text{defn}}{\iff} \|\xi - \eta\| < \varepsilon$

Normed space X, $r > 0$ に対し,

- $X_r := \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$

A を C*-algebra, H を Hilbert space とし, $A \subset B(H)$ とする. また, $x, x_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ とする.

- $I(A) := \{u \in A \mid u \text{ is an isometry}\}$
- $A' := \{b \in B(H) \mid ab = ba \text{ for all } a \in A\}$
- $Z(A) := A \cap A'$
- $x_n \overset{\text{s}}{\to} x,\ x = \text{s-}\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{defn}}{\iff} x_n$ は x に strong topology で収束する.
- $x_n \overset{\text{w}}{\to} x,\ x = \text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{defn}}{\iff} x_n$ は x に weak topology で収束する.
- $x_n \overset{\sigma\text{-w}}{\to} x,\ x = \sigma\text{-w-}\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{defn}}{\iff} x_n$ は x に σ-weak topology で収束する.
- $x_n \overset{\text{n}}{\to} x \overset{\text{defn}}{\iff} x_n$ は x に norm topology で収束する.

A を C*-algebra とし, $\alpha, \alpha_n \in \text{Aut}(A)$, $n \in \mathbb{N}$ とする.

- $\alpha_n \overset{\text{pt-n}}{\to} \alpha \overset{\text{defn}}{\iff} \alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n(x) \quad \text{for all } x \in A$

A を abelian C*-algebra とする.

- $\Omega(A) := \{\tau \colon A \to \mathbb{C} \mid \tau \text{ is a non-zero homomorphism}\}$

A を C*-algebra, H_1, H_2 を Hilbert spaces, $\pi_1 \colon A \to B(H_1)$, $\pi_2 \colon A \to B(H_2)$ を representations, $U \colon H_1 \to H_2$ を map とする.

- $(\pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2})(a) := \begin{pmatrix} \pi_{\omega_1}(a) & 0 \\ 0 & \pi_{\omega_2}(a) \end{pmatrix}$
- $\operatorname{ran} U := \{U\xi \in H_2 \mid \xi \in H_1\}$

Definition 2.1. A を C*-algebra とする. $e \in A$ が *minimal projection* であるとは, $eAe = \mathbb{C}e$ を満たすことである.

Definition 2.2. H を Hilbert space とする. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ について, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{m,n}$ のとき, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を H の *orthonormal system* (ONS) という. ただし, $\delta_{m,n}$ はクロネッカー積を表すものとする. また, ONS $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の 1 次結合全体が H で dense なとき, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を H の *complete orthonormal system* (CONS) という.

Definition 2.3. A を C*-algebra, H を Hilbert space, $\pi\colon A \to B(H)$ を representation とする. π が

- *non-degenerate* $\overset{\text{defn}}{\iff}$ $\overline{\operatorname{span}\{\pi(a)\xi \mid a \in A,\ \xi \in H\}}^{n} = H$ である.
- *irreducible* $\overset{\text{defn}}{\iff}$ closed subspace $K \subset H$ が $\pi(A)K \subset K$ を満たすならば, $K = \{0\}$ または $K = H$ である.

Definition 2.4. A を C*-algebra, H_1, H_2 を Hilbert spaces, $\pi_1\colon A \to B(H_1)$, $\pi_2\colon A \to B(H_2)$ を $*$-representations とする. π_1, π_2 が

- *unitary equivalent* ($\pi_1 \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_2$ と表す) $\overset{\text{defn}}{\iff}$ ある unitary $u\colon H_1 \to H_2$ で, $\pi_2 = \operatorname{Ad} u \circ \pi_1$ を満たすものが存在する.
- *quasi-equivalent* ($\pi_1 \overset{\mathrm{q}}{\sim} \pi_2$ と表す) $\overset{\text{defn}}{\iff}$ ある $*$-isomorphism $\alpha\colon \pi_1(A)'' \to \pi_2(A)''$ で, $\pi_2 = \alpha \circ \pi_1$ を満たすものが存在する.
- *disjoint* $\overset{\text{defn}}{\iff}$ $(\pi_1 \oplus \pi_2)(A)'' = \pi_1(A)'' \oplus \pi_2(A)''$ が成り立つ.

Definition 2.5. A を C*-algebra とし, α を A の automorphism とする. α が

- *inner* $\overset{\text{defn}}{\iff}$ $\alpha = \operatorname{Ad} u$ なる $u \in U(A)$ が存在する.
- *asymptotically inner* $\overset{\text{defn}}{\iff}$ $\alpha = \lim_{t\to\infty} \operatorname{Ad} u_t$ なる $(u_t)_{t\in[0,\infty)} \subset U(A)$ で, t に関して連続なものが存在する.

また,

$$\begin{aligned}\operatorname{AInn}(A) &:= \{\alpha \in \operatorname{Aut}(A) \mid \alpha \text{ is an asymptotically inner of } A\}\\ \operatorname{AInn}_0(A) &:= \{\alpha \in \operatorname{AInn}(A) \mid \alpha = \lim_{t\to\infty} \operatorname{Ad} u_t \text{かつ } u_0 = 1 \text{ なる } (u_t)_{t\in[0,\infty)} \subset U(A) \text{ で},\\ &\qquad t \text{ に関して連続なものが存在する. }\}\end{aligned}$$

Theorem 2.6 (Hahn–Banach)**.** X を topological vector space とし, $U, V \subset X$ を disjoint, non-empty, convex な subset とする. このときもし, U が open ならば, ある $\varphi \in X^*$ と, ある $t \in \mathbb{R}$ が取れて,

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < t \leq \operatorname{Re}\varphi(y), \quad x \in U,\ y \in V$$

となる.

Theorem 2.7 (Gelfand)**.** A を non-zero abelian C*-algebra とすると, Gelfand representation

$$\varphi\colon A \to C_0(\Omega(A)), \quad a \mapsto \hat{a}$$

は, $*$-isomorphism である. ただし, $\hat{a}(\tau) := \tau(a)$, $\tau \in \Omega(A)$ とする.

Theorem 2.8 (Functional calculus)**.** A を unital C*-algebra, $a \in A$ を normal element とし, $z\colon \operatorname{Sp}(a) \hookrightarrow \mathbb{C}$ を inclusion map とする. このとき, ある faithful unital $*$-homomorphism $\varphi\colon C(\operatorname{Sp}(a)) \to A$ で, $\varphi(z) = a$ を満たすものが唯一存在する. また, $\varphi(C(\operatorname{Sp}(a)))$ は a と 1 が生成する A の C*-subalgebra と一致する. この φ を functional calculus という.

Theorem 2.9 (Kaplansky)**.** H を Hilbert space とし, A を $\overline{A}^s = B$ なる $B(H)$ の C*-subalgebra とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) A_{sa} は B_{sa} において strongly dense.

(2) $(A_{sa})_1$ は $(B_{sa})_1$ において strongly dense.

(3) A_1 は B_1 において strongly dense.

Definition 2.10. A を C*-algebra とする. Representation $\{\rho, K\}$ が *universal* であるとは, 任意の representation $\{\pi, H\}$ に対し, ある $\tilde{\pi}\colon \rho(A)'' \to \pi(A)''$ で次を満たすものが存在することである.

- $\tilde{\pi}$ は surjective かつ σ-weakly continuous.
- 次の可換図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"'] \arrow[dr, "\pi"'] & \rho(A)'' \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ & \pi(A)'' \end{tikzcd}$$

を満たす.

Theorem 2.11. 任意の C*-algebra は, universal representation をもつ. 更にこのとき, ある $\tilde{\rho}\colon A^{**} \to \rho(A)''$ で, 次を満たすものが存在する.

- $\tilde{\rho}$ は isometry, surjective.
- $\tilde{\rho}$ は $\sigma(A^{**}, A^*)$ 位相と σ-weak 位相に関して同相である.
- 次の可換図式

$$\begin{tikzcd} & A^{**} \arrow[d, "\tilde{\rho}"] \\ A \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\rho"'] & \rho(A)'' \end{tikzcd}$$

を満たす.

Lemma 2.12. H を Hilbert space とし, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \in H$ を ONS とする. また, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in H$ をとる. このとき, 次が成り立つ.

(1) ある $u \in B(H)$ で, $u\epsilon_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\|u\| \le \sqrt{2n}\max\{\|\eta_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$ を満たすものが存在する.

(2) もしある $v \in B(H)_{sa}$ で $v\epsilon_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあるとすると, (1) の $u \in B(H)$ は self-adjoint に取ることができる.

(3) ある $\varepsilon > 0$ とある $v \in B(H)_{sa}$ で, $v\epsilon_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\|v\| \le \varepsilon$ を満たすものがあるとすると, (1) の u は $\|u\| \le 2\varepsilon$ とできる.

Proof. まず (1) を示す． $u := \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \theta_{\eta_j,\epsilon_j}$ とすると, $u\epsilon_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ である．よって, $\xi \in H$, $M := \max\{\|\eta_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$ とすると,

$$\begin{aligned}
\|u\xi\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle \xi, \epsilon_j \rangle \eta_j \right\| &\le \sum_{j=1}^{n} |\langle \xi, \epsilon_j \rangle| \|\eta_j\| \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle \xi, \epsilon_j \rangle|^2 \sum_{j=1}^{n} \|\eta_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (\|\xi\|^2 n M^2)^{1/2} = \|\xi\| \sqrt{n} M
\end{aligned}$$

なので, $\|u\| \le \sqrt{n}M$ となり, (1) がわかる．

次に (2) を示す．ある $v \in B(H)_{sa}$ で $v\epsilon_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあるとする．このとき,

$$u := \sum_{j=1}^{n} \theta_{v\epsilon_j,\epsilon_j} = \sum_{j=1}^{n} \langle \cdot, \epsilon_j \rangle v\epsilon_j = \sum_{j=1}^{n} v(\langle \cdot, \epsilon_j \rangle \epsilon_j) = v \sum_{j=1}^{n} \theta_{\epsilon_j,\epsilon_j}$$

とする．ここで, $p := \sum_{j=1}^{n} \theta_{\epsilon_j,\epsilon_j}$ とおくと, $u = vp$ である．この p を使って, $u' := vp + pv - pvp$ とおく．すると, $u' \in B(H)_{sa}$ であり,

$$u'\epsilon_j = v\epsilon_j + pv\epsilon_j - pv\epsilon_j = v\epsilon_j = \eta_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

を満たす．また,

$$\begin{aligned}
\|u'\|^2 &= \|((1-p)vp + pv)^*((1-p)vp + pv)\| \\
&= \|((1-p)vp)^*((1-p)vp) + (pv)^*(pv)\| \\
&\le \|(1-p)vp\|^2 + \|pv\|^2 \\
&\le \|vp\|^2 + \|pv\|^2 = 2\|u\|^2 \le 2(\sqrt{n}M)^2 = 2nM^2
\end{aligned}$$

より, $\|u'\| \le \sqrt{2n}M$ となり, (2) がわかる．

最後に, $\|v\| \le \varepsilon$ とすると,

$$\|u'\| = \|pv + (1-p)vp\| \le 2\|v\| \le 2\varepsilon$$

であることもわかるので (3) も示せた． □

Theorem 2.13 (Kadison)**.** A を C*-algebra とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を irreducible representation とする．$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in H$ を linearly independent とし, また, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in H$ をとる．このとき, 次が成り立つ．

(1) ある $u \in A$ で, $\pi(u)\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものが存在する．

(2) もしある $v \in B(H)_{sa}$ で $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあるとすると, (1) の $u \in A$ は self-adjoint に取ることができる．

(3) ある $\varepsilon > 0$ とある $v \in B(H)_{sa}$ で, $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\|v\| \le \varepsilon$ を満たすものがあるとすると, (1) の u は $\|u\| \le 2\varepsilon$ とできる．

(4) もし $1_H \in \pi(A)$ であり, ある $v \in U(H)$ で $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあるとすると, (1) の $u \in A$ は unitary に取ることができる. 更に, この $u \in U(A)$ は, ある $w \in A_{sa}$ を用いて $u = e^{iw}$ と書ける.

Proof. 初めに, (2) を示す. すなわち, ある $v \in B(H)_{sa}$ で $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあるとすると, ある $u \in A_{sa}$ で $\pi(u)\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがとれることを示す. まず, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in H$ を orthogonal と仮定してよいことを言う. orthogonal のときに示せたとする. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in H$ を linearly independent とし, $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \in H$ を $\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 + \cdots + \mathbb{C}\xi_n$ の CONS とする. このとき, ある $u \in A_{sa}$ で $\pi(u)\epsilon_j = v\epsilon_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがとれる. よって, $\pi(u) = v$ on $\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 + \cdots + \mathbb{C}\xi_n$ なので, $\pi\xi_j = v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ となる. したがって, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in H$ が orthogonal の場合だけ示せば十分である. $\max\{\|\eta_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\} \leq 1/(2n)$ と仮定する.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$U_\varepsilon := \{u \in B(H) \mid \max\{\|u\xi_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\} < \varepsilon\}$$

とおくと, U_ε は 0 の strong topology における neighbourhood である. π は irreducible なので, $\pi(A)$ は $B(H)$ の中で strongly dense である. したがって, Theorem 2.9 (2) より, 任意の $r > 0$ に対して, $\pi((A_{sa})_r)$ は $(B(H)_{sa})_r$ の中で storongly dense である. よって, もし $w \in B(H)_{sa}$ ならば, ある $w' \in A_{sa}$ で, $\pi(w') - w \in U_\varepsilon$ かつ $\|w'\| \leq \|w\|$ を満たすものが存在する.

Lemma 2.12 (2) より, ある $v_0 \in B(H)_{sa}$ で, $v_0\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\|v_0\| \leq \sqrt{2n}\max\{\|\eta_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$ を満たすものが存在する. この v_0 に対し, 前段落で示したことより, ある $u_0 \in A_{sa}$ で, $\pi(u_0) - v_0 \in U_{1/(2N)}$ かつ $\|u_0\| \leq \|v_0\|$ を満たすものがとれる. ただし $N := \sqrt{2n}$ とする. u_0 に対し, Lemma 2.12 (2) より, ある $v_1 \in B(H)_{sa}$ で, $v_1\xi_j = (v_0 - \pi(u_0))\xi_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ

$$\|v_1\| \leq \sqrt{2n}\max\{\|(v_0 - \pi(u_0))\xi_j\| \mid j = 1, 2, \cdots, n\} \leq \sqrt{2n} \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}$$

を満たすものが存在する. この v_1 に対し, 前段落で示したことより, ある $u_1 \in A_{sa}$ で, $\pi(u_1) - v_1 \in U_{1/(2^2N)}$ かつ $\|u_1\| \leq \|v_1\| \leq 1/2$ を満たすものがとれる.

このようにして, $k \in \mathbb{N}$ に対して帰納的に, $v_k\xi_j = (v_{k-1} - \pi(u_{k-1}))\xi_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ かつ $\|v_k\| \leq 1/2^k$ を満たす $v_k \in B(H)_{sa}$ と, $\pi(u_k) - v_k \in U_{1/(2^{k+1}N)}$ かつ $\|u_k\| \leq \|v_k\| \leq 1/2^k$ を満たす $u_k \in A_{sa}$ が構成できる. ここで,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$$

より, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ は A の中で収束する. よって, $u := \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ とおくと, $u \in A_{sa}$ である. また $j = 1, 2, \cdots, n$ に対し,

$$\begin{aligned}
\eta_j - \pi(u)\xi_j &= \lim_{r\to\infty} \left(\eta_j - \pi\left(\sum_{k=0}^{r} u_k\right)\xi_j\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \left(\eta_j - \sum_{k=0}^{r} \pi(u_k)\xi_j\right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \left(\eta_j - \sum_{k=0}^{r} (v_k - v_{k+1})\xi_j\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to\infty} (\eta_j - v_0\xi_j + v_{r+1}\xi_j) \\
&= \lim_{r\to\infty} v_{r+1}\xi_j = 0
\end{aligned}
$$

なので, $\pi(u)\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ となることがわかったので, (2) が示せた. また, 同様の議論により (3) も示すことができる.

次に, (1) を示す. まず Lemma 2.12 (1) より, ある $v \in B(H)$ で $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものが取れる. $v = \mathrm{Re}\, v + i\,\mathrm{Im}\, v$, $\mathrm{Re}\, v,\ \mathrm{Im}\, v \in B(H)_{sa}$ と表せるので, 先に示したことより, ある $u_1, u_2 \in A_{sa}$ で

$$
\begin{aligned}
&\pi(u_1)\xi_j = \mathrm{Re}\, v\xi_j, \\
&\pi(u_2)\xi_j = \mathrm{Im}\, v\xi_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

を満たすものが取れる. ここで, $u := u_1 + iu_2$ とおけば,

$$
\begin{aligned}
\pi(u)\xi_j &= \pi(u_1)\xi_j + i\pi(u_2)\xi_j \\
&= \mathrm{Re}\, v\xi_j + i\,\mathrm{Im}\, v\xi_j = v\xi_j = \eta_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

であるので, (1) も示すことができた.

最後に (4) を示す. $1_H \in \pi(A)$ かつ, ある $v \in U(H)$ で $v\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものがあったとする. 先ほどと同様に $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in H$ を orthogonal と仮定してよい. このとき,

$$
\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \langle v\xi_i, v\xi_j \rangle = \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n
$$

なので, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in H$ も orthogonal である. $K := \mathrm{span}\{\xi_j, \eta_j \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$ に対して, $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ を拡張し, K の CONS $\{\xi_j\}_{j=1}^m$ を構成する. 同様に, $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ を拡張し, K の CONS $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ を構成する. すると, K の CONS を取り替える写像を考えることにより, ある $v_0 \in U(K)$ で, $v_0\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$ を満たすものが取れる. v_0 は finite dimensional Hilbert space 上の normal operator なので, diagonalisable である. したがって, ある K の CONS $\{\epsilon_j\}_{j=1}^m$ と, ある $\lambda_j \in \mathbb{C}$ が存在して, $v_0\epsilon_j = \lambda_j\epsilon_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$ となる. 今, $v_0 \in U(K)$ なので, ある $t_j \in \mathbb{R}$ が取れて, $\lambda_j = e^{it_j}$, $j = 1, 2, \cdots, m$ とかける. ここで, $w' := \sum_{j=1}^m \theta_{\epsilon_j, \epsilon_j}$ とおくと, $w' \in B(H)_{sa}$ で, $w'\epsilon_j = t_j\epsilon_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$ なので, 先に示したことより, ある $w \in A_{sa}$ で, $\pi(w)\epsilon_j = t_j\epsilon_j$, $j = 1, 2, \cdots, m$ を満たすものがとれる. したがって, $u := e^{iw}$ とおけば $u \in U(A)$ で,

$$
\begin{aligned}
\pi(u)\epsilon_j = \pi(e^{iw})\epsilon_j &= \pi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iw)^k}{k!}\right)\epsilon_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\pi(w)^k\epsilon_j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(it_j)^k}{k!}\right)\epsilon_j = e^{it_j}\epsilon_j = \lambda_j t_j = v_0\epsilon_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

より, $\pi(u) = v_0$ on K なので, $\pi(u)\xi_j = v_0\xi_j = \eta_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$ となることがわかる. □

3 Property 1.2 $\Longrightarrow$ Theorem 1.1

Theorem 3.1. A を separable C*-algebra とし, Property 1.2 を満たすとする. $\ker \pi_{\omega_1} = \ker \pi_{\omega_2}$ なる任意の $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{PS}(A)$ に対し, ある $\alpha \in \mathrm{AInn}_0(A)$ が存在して, $\omega_1 \circ \alpha = \omega_2$ を満たす.

Lemma 3.2. A を C*-algebra とする．φ を A の pure state とし, $L := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$ とする．このとき, $\ker\varphi = L + L^*$ を満たす．

Proof. まず, $\ker\varphi \supset L + L^*$ を示す．$a \in L$ とすると,

$$|\varphi(a)| = |\varphi(1^*a)| \leq \varphi(a^*a)^{1/2}\varphi(1^*1)^{1/2} = 0$$

より $a \in \ker\varphi$ である．また, $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = 0$ なので $a^* \in \ker\varphi$ なので, $\ker\varphi \supset L + L^*$ となる．

次に逆の包含を示す． $x \in \ker\varphi$ とする． $(\pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi)$ を φ の GNS 表現とする． $K := \mathrm{span}\{\xi_\varphi, \pi_\varphi(x)\xi_\varphi\}$ とおく．$\xi_\varphi \perp \pi_\varphi(x)\xi_\varphi$ より, ξ_φ, $\pi_\varphi(x)\xi_\varphi$ は 1 次独立なので, Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (2)) より, ある $b \in A_{sa}$ が存在し, $\pi_\varphi(b)\xi_\varphi = \xi_\varphi$, $\pi_\varphi(b)\pi_\varphi(x)\xi_\varphi = 0$ を満たす．よって

$$\varphi((bx)^*(bx)) = \langle \pi_\varphi(x^*b^*bx)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle = 0$$

より, $bx \in L$. また,

$$\varphi(((1-b)x)((1-b)x)^*) = \langle \pi_\varphi((1-b)xx^*(1-b))\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle = 0$$

である．よって, $(1-b)x \in L^*$.

以上より, $x = bx + (1-b)x \in L + L^*$. □

Lemma 3.3 (excision)**.** A を C*-algebra とする．φ を A の pure state とする．このとき, ある A の net e_i で, $0 \leq e_i \leq 1$, $\varphi(e_i) = 1$,

$$\lim_i \|e_i a e_i - \varphi(a)e_i^2\| = 0, \quad a \in A$$

を満たすものが存在する．

Proof. $L := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$ とする． すると, ある L_1 の positive net u_i で, $a = \lim_i au_i$ for all $a \in L$ なるものが存在する．Lemma 3.2 より, $e_i := 1 - u_i$ とおくと, $a - \varphi(a) \in \ker\varphi = L + L^*$. ここで, $\lim_i \|e_i(a - \varphi(a))e_i\| = 0$ を示す．$l_1 + l_2^* \in L + L^*$ とすると, $\lim_i \|l_1 e_i\| = 0$, $\lim_i \|e_i l_2^*\| = 0$. よって,

$$\lim_i \|e_i(l_1 + l_2^*)e_i\| \leq \lim_i(\|e_i l_1 e_i\| + \|e_i l_2^* e_i\|) \leq \lim_i(\|l_1 e_i\| + \|e_i l_2^*\|) = 0.$$

よって, $\lim_i \|e_i(a - \varphi(a))e_i\| = 0$. また, $\varphi(e_i) = \varphi(1) - \varphi(u_i) = 1$ となる． □

Lemma 3.4. H を Hilbert space とし, $\xi_1, \xi_2 \in H$ が $\|\xi_1\| = \|\xi_2\| = 1$ であるとする．このとき, ある unitary $V \in B(H)$ で $V\xi_1 = \xi_2$ を満たすものがとれる．更に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|\xi_1 - \xi_2\| < \delta$ ならば, 上の $V \in B(H)$ として $\|V - 1_H\| < \varepsilon$ を満たすものがとれる．

Proof. ξ_1 と ξ_2 は linearly independent としてよい．e_1, e_2 を $e_1 = \xi_1$ なる $\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2$ の CONS とする．$\xi_2 := \lambda e_1 + \mu e_2$ とおくと, $\|\xi_2\| = 1$ より, $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$ である．

$$\begin{cases} Te_1 := \lambda e_1 + \mu e_2 = \xi_2, \\ Te_2 := -\bar{\mu}e_1 + \bar{\lambda}e_2 \end{cases}$$

とおくと, linear map $T\colon \mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 \to \mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2$ が定まる.

$$\begin{aligned} T^*T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & -\mu \\ \bar{\mu} & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より, $T^*T = 1_{\mathbb{C}\xi_1+\mathbb{C}\xi_2}$ で, 同様に $TT^* = 1_{\mathbb{C}\xi_1+\mathbb{C}\xi_2}$ より, T は unitary である. T の固有値を求める.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t-\lambda & -\mu \\ \bar{\mu} & t-\bar{\lambda} \end{vmatrix} &= t^2 - (\lambda+\bar{\lambda})t + 1 \\ &= t^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)t + 1 = 0 \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{Re}\lambda \pm \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda)^2 - 1} \\ &= \operatorname{Re}\lambda \pm i\sqrt{1-(\operatorname{Re}\lambda)^2} \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} \|T-1\|^2 &= \sup_{t\in \operatorname{Sp} T} |t-1|^2 \\ &= (1-\operatorname{Re}\lambda)^2 + 1 - (\operatorname{Re}\lambda)^2 \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}\lambda = \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \end{aligned}$$

である. $H = \mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 \oplus (\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2)^\perp$ に対し, $V := T \oplus 1_{(\mathbb{C}\xi_1+\mathbb{C}\xi_2)^\perp}$ とすると,

$$\|V-1\| = \|T-1\| = \|\xi_1 - \xi_2\|$$

である. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とおけば, $\|V-1\| < \varepsilon$ で, $V\xi_1 = T\xi_1 = \xi_2$ となる. □

Lemma 3.5. A を C*-algebra とする. $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{PS}(A)$ が, $\ker \pi_{\omega_1} = \ker \pi_{\omega_2}$ を満たすとする. このとき, 任意の $F \Subset A$, $\varepsilon > 0$ に対し, ある $u \in U(A)$ が存在して,

$$|\omega_1(x) - \omega_2 \circ \operatorname{Ad} u(x)| < \varepsilon, \quad x \in F$$

を満たす.

Proof. $\omega_1 \in \mathrm{PS}(A)$ なので, Lemma 3.3 より, ある $e \in A$ で, $e \geq 0$, $\|e\| = 1$, $\omega_1(e) = 1$ かつ,

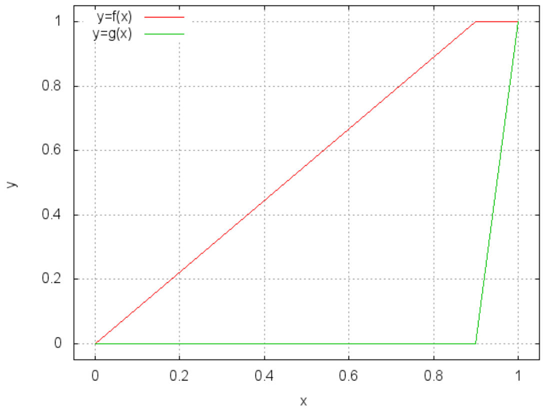
$$\|exe - \omega_1(x)e^2\| < \varepsilon, \quad x \in F$$

となるものが存在する. すると, ある $\xi \in H_{\omega_2}$ で, $\|\xi\| = 1$ かつ $\pi_{\omega_2}(e)\xi = \xi$ なるものがとれる. 実際, 任意に $\eta \in H_{\omega_2}$ をとり,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{1-\varepsilon}x & (\text{if } 0 \leq x \leq 1-\varepsilon \text{ and } x \in \operatorname{Sp}(k)), \\ 1 & (\text{if } 1-\varepsilon < x \leq 1 \text{ and } x \in \operatorname{Sp}(k)), \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1 & (\text{if } 0 \leq x \leq 1-\varepsilon \text{ and } x \in \operatorname{Sp}(k)), \\ \frac{1}{\varepsilon}x - \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} & (\text{if } 1-\varepsilon < x \leq 1 \text{ and } x \in \operatorname{Sp}(k)) \end{cases}$$

とおく.



上図は, $\varepsilon = 0.1$ の場合の f, g のグラフである．ここで, $\varphi\colon C(\mathrm{Sp}(e)) \to \mathrm{C}^*(e, 1)$ を functional calculus (Theorem 2.8) とし, $f(e) := \varphi(f)$ とおく．すると,

$$\begin{aligned}\pi_{\omega_2}(f(e))(\pi_{\omega_2}(g(e))\eta) &= \pi_{\omega_2}(f(e)g(e))\eta \\ &= \pi_{\omega_2}(f \cdot g(e))\eta \\ &= \pi_{\omega_2}(g(e))\eta\end{aligned}$$

である．また, $\|e - f(e)\| < \varepsilon$ なので, ある定数 $M > 0$ が取れて,

$$\|f(e)xf(e) - \omega_1(x)f(e)^2\| < M\varepsilon, \quad x \in F$$

となる．したがって, $\xi := \frac{\pi_{\omega_2}(g(e)\eta)}{\|\pi_{\omega_2}(g(e))\eta\|}$ とおき, e として初めから $f(e)$ を考えればよい．よって, ある $\xi \in H_{\omega_2}$ で, $\|\xi\| = 1$ かつ $\pi_{\omega_2}(e)\xi = \xi$ なるものがとれた．

このとき, Lemma 3.4 より, ある unitary $v \in B(H)$ で, $v(\pi_{\omega_2}(e)\xi) = \xi$ なるものが存在する．この v に対し, Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (4)) より, ある $u \in U(A)$ が存在して, $\pi_{\omega_2}(u^*)\xi_{\omega_2} = \xi$ となる．よって, 任意の $x \in F$ に対して,

$$\begin{aligned}|\omega_1(x) - \omega_2 \circ \mathrm{Ad}\, u(x)| &= |\omega_1(x)\langle\pi_{\omega_2}(e)\xi, \xi\rangle - \langle\pi_{\omega_2}(uxu^*)\xi_{\omega_2}, \xi_{\omega_2}\rangle| \\ &= |\langle\pi_{\omega_2}(\omega_1(x)e^2)\xi, \xi\rangle - \langle\pi_{\omega_2}(exe^*)\xi_{\omega_2}, \xi_{\omega_2}\rangle| \\ &\leq \|\omega_1(x)e^2 - exe\| < \varepsilon\end{aligned}$$

となる． $\square$

Remark 3.6. 特に, Lemma 3.5 の $u \in U(A)$ は, Theorem 2.13 (4) より, ある $\theta \in A_{sa}$ が存在して, $u = e^{i\theta}$ と表せる．

Lemma 3.7. *A を separable C*-algebra とし, Property 1.2 を満たすとする．任意の $F \Subset A$, $\pi_\omega(A) \cap K(H_\omega) = \{0\}$ を満たす$\omega \in \mathrm{PS}(A)$, $\varepsilon > 0$ に対し, ある $G \Subset A$, $\delta > 0$ が存在して, 以下を満たす．*

もし, $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ が $\ker \pi_\varphi = \ker \pi_\omega$, $|\varphi(x) - \omega(x)| < \delta$, $x \in G$ を満たすならば, 任意の $F' \Subset A$, $\varepsilon' > 0$, に対して, $(u_t)_{t\in[0,1]} \subset U(A)$ で t に関して連続で, $u_0 = 1$,

$$|\varphi(x) - \omega \circ \mathrm{Ad}\, u_1(x)| < \varepsilon', \quad x \in F'$$
$$\|\mathrm{Ad}\, u_t(x) - x\| < \varepsilon, \quad x \in F,\ t \in [0,1]$$

を満たすものが存在する.

Proof. 任意の (F, ω, ε) に対し, Property 1.2 より, ある (G, δ) が取れる. $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ が, $\ker \pi_\varphi = \ker \pi_\omega$, $|\varphi(x) - \omega(x)| < \delta/2$, $x \in G$ を満たすと仮定する. 任意の $F' \Subset A$, $\varepsilon' > 0$ を取る. ここで, $\varepsilon' < \delta/2$ として良い. すると, Lemma 3.5 より, ある $u \in U(A)$ が存在して,

$$|\varphi(x) - \omega \circ \mathrm{Ad}\, u(x)| < \varepsilon', \quad x \in F' \cup G$$

となり,

$$|\omega \circ \mathrm{Ad}\, u(x) - \omega(x)| < \varepsilon' + \delta/2 < \delta, \quad x \in G$$

となる. $\varphi := \omega \circ \mathrm{Ad}\, u$ とすると, $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, $\pi_\varphi \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_\omega$ (特に $\pi_\varphi \overset{\mathrm{q}}{\sim} \pi_\omega$) となることを示す.

$\varphi \in S(A)$ に対して, $(\pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi)$ を φ の GNS 表現とする.

$$\langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \varphi(x) = \omega \circ \mathrm{Ad}\, u(x) = \omega(uxu^*) = \langle \pi_\omega \circ \mathrm{Ad}\, u(x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle$$

より, $(\pi_\varphi, H_\varphi, \xi_\varphi) \overset{\mathrm{u}}{\sim} (\pi_\omega \circ \mathrm{Ad}\, u, H_\omega, \xi_\omega)$. 一方, $v := \pi_\omega(u)$ とおくと, $v\colon H_\omega \to H_\omega$ は unitary で, $\pi_\omega \circ \mathrm{Ad}\, u(x) = \pi_\omega(uxu^*) = v\pi_\omega(x)v^*$ なので, $(\pi_\omega \circ \mathrm{Ad}\, u, H_\omega, \xi_\omega) \overset{\mathrm{u}}{\sim} (\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$. よって, $\pi_\varphi \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_\omega$ なので, π_φ も irreducible となり, $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ を満たす.

以上より, Property 1.2 より, ある $(u_t)_{t\in[0,1]} \in U(A)$ で t に関して連続で, $u_0 = 1$, $\omega \circ \mathrm{Ad}\, u = \omega \circ \mathrm{Ad}\, u_1$,

$$\|\mathrm{Ad}\, u_t(x) - x\| < \varepsilon, \quad x \in F,\ t \in [0,1]$$

を満たすものが存在する. 更に,

$$|\varphi(x) - \omega \circ \mathrm{Ad}\, u_1(x)| < \varepsilon', \quad x \in F'$$

も満たしている. □

Proof of Theorem 3.1. $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{PS}(A)$ が $\ker \pi_{\omega_1} = \ker \pi_{\omega_2}$ を満たすとする.

Case 1. $\pi_{\omega_1}(A) \cap K(H_{\omega_1}) \neq \{0\}$ のとき.

$\pi_{\omega_1}(A) \cap K(H_{\omega_1}) \neq \{0\}$ より, $K(H_{\omega_1}) \subset \pi_{\omega_1}(A)$ がわかる. まず, $\pi_{\omega_1} \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_{\omega_2}$ であることを示すために,

(1) $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint でない $\Rightarrow \pi_{\omega_1} \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_{\omega_2}$

(2) $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint でない

を示す.

(1) について示す. $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint でないとし,

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \{(\pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2})(a) \in B(H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}) \mid a \in A\}'$$

とする.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p\pi_{\omega_1}(a) & q\pi_{\omega_2}(a) \\ r\pi_{\omega_1}(a) & s\pi_{\omega_2}(a) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\omega_1}(a) & 0 \\ 0 & \pi_{\omega_2}(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_{\omega_1}(a) & 0 \\ 0 & \pi_{\omega_2}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_{\omega_1}(a)p & \pi_{\omega_1}(a)q \\ \pi_{\omega_2}(a)r & \pi_{\omega_2}(a)s \end{pmatrix}, \quad a \in A
\end{aligned}$$

よって, $p \in \pi_{\omega_1}(A)' = \mathbb{C}1_{H_{\omega_1}}$, $s \in \pi_{\omega_2}(A)' = \mathbb{C}1_{H_{\omega_2}}$. ここで, $q = r = 0$ とすると,

$$\{(\pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2})(a) \in B(H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}) \mid a \in A\}' = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\{(\pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2})(a) \in B(H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}) \mid a \in A\}'' &= B(H_{\omega_1}) \oplus B(H_{\omega_2}) \\
&= \pi_{\omega_1}(A)'' \oplus \pi_{\omega_2}(A)''
\end{aligned}$$

より, $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint となり矛盾. よって, $q \neq 0$ とする. ($r \neq 0$ の場合も同様) ここで, $q\pi_{\omega_2}(a) = \pi_{\omega_1}(a)q$, $a \in A$ だったので, $q^*q\pi_{\omega_2}(a) = q^*\pi_{\omega_1}(a)q = \pi_{\omega_2}(a)q^*q$ となる. よって, $q^*q \in \pi_{\omega_2}(A)' = \mathbb{C}1_{H_{\omega_2}}$ なので, $\lambda := q^*q$ とおく. 同様にして, $qq^* \in \pi_{\omega_1}(A)' = \mathbb{C}1_{H_{\omega_1}}$ となり,

$$\|qq^*\| = \|q^*\|^2 = \|q\|^2 = \|q^*q\|$$

なので, $\lambda = qq^*$ である. よって, $u := q/\sqrt{\lambda}$ をとれば, $u\pi_{\omega_2}(a) = \pi_{\omega_1}(a)u$, $a \in A$ なる unitary $u\colon H_{\omega_2} \to H_{\omega_1}$ を得る. よって, $\pi_{\omega_1} \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_{\omega_2}$ となり (1) が示せた.

次に (2) を示す. $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint と仮定すると,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\in B(H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}) \\
&= \pi_{\omega_1}(A)'' \oplus \pi_{\omega_2}(A)'' \\
&= \overline{\{(\pi_{\omega_1} \oplus \pi_{\omega_2})(a) \in B(H_{\omega_1} \oplus H_{\omega_2}) \mid a \in A\}}^{\sigma-w} \qquad (*)
\end{aligned}$$

である. ここで, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を H_{ω_1} の CONS とし, $e_{ii} := \theta_{e_i,e_i} \in K(H_{\omega_1})$ とおく. $\rho\colon \pi_{\omega_1}(A) \to A/\ker\pi_{\omega_1}(A) = A/\ker\pi_{\omega_2}(A) \to \pi_{\omega_2}(A)$ を, $\rho := \overline{\pi_{\omega_2}} \circ \overline{\pi_{\omega_1}}^{-1}$ とすると, ρ は $*$-isomorphism である. ただし, $\overline{\pi_{\omega_i}}\colon A/\ker\pi_{\omega_i}(A) \to \pi_{\omega_i}(A)$, $i = 1, 2$ を quotient map とする. $e_{ii} \in K(H_{\omega_1}) \subset \pi_{\omega_1}(A)$ より, $u_{ii} := \overline{\pi_{\omega_1}}^{-1}(e_{ii})$, $f_{ii} := \overline{\pi_{\omega_2}}(u_{ii}) = \rho(e_{ii})$ とおくと, f_{ii} は minimal projection となり, 特に $f_{ii} \in K(H_{\omega_2})$ である. 今, $(*)$ より, ある net $a_\lambda \in A$ で, $\pi_{\omega_1}(a_\lambda) \xrightarrow{\mathrm{s}} 1$ かつ $\pi_{\omega_2}(a_\lambda) \xrightarrow{\mathrm{s}} 0$ を満たすものがとれる. 一般に, $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{s}} x \Rightarrow x_\alpha a \xrightarrow{\mathrm{n}} xa$, $a \in K(H)$ であるので, $e_{ii} \in K(H_\omega)$ より, $\pi_{\omega_1}(a_\lambda)e_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} e_{ii}$ となり, $\overline{\pi_{\omega_1}}(a_\lambda + \ker\pi_{\omega_1})e_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} e_{ii}$ を満たす. したがって, $(a_\lambda + \ker\pi_{\omega_1})u_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} u_{ii}$ より, $\overline{\pi_{\omega_2}}(a_\lambda + \ker\pi_{\omega_2})f_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} f_{ii}$ なので, $\pi_{\omega_2}(a_\lambda)f_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} f_{ii} \neq 0$ となる. 一方, $f_{ii} \in K(H_{\omega_2})$ より,

$\pi_{\omega_2}(a_\lambda)f_{ii} \xrightarrow{\mathrm{n}} 0$. よって, 矛盾している. 以上より, $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ が disjoint でないとなり, これで (1), (2) より, $\pi_{\omega_1} \overset{\mathrm{u}}{\sim} \pi_{\omega_2}$ がわかった.

よって, ある unitary $U\colon H_{\omega_1} \to H_{\omega_2}$ で,

$$\pi_{\omega_2}(a) = U\pi_{\omega_1}(a)U^*, \quad a \in A$$

を満たすものが取れる. ここで, $U\xi_{\omega_1}, \xi_{\omega_2} \in H$, $\|U\xi_{\omega_1}\| = \|\xi_{\omega_2}\| = 1$ なので, Lemma 3.4 より, ある unitary $V \in B(H_{\omega_2})$ で, $V(U\xi_{\omega_1}) = \xi_{\omega_2}$ なるものがとれる. この V に対して, Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (4)) より, ある $v \in U(A)$, $\theta \in A_{sa}$ が存在して, $v = e^{i\theta}$, $\pi_{\omega_2}(v)(U\xi_{\omega_1}) = \xi_{\omega_2}$ となる. ここで $u_t := e^{it\theta}$, $t \in [0,1]$ とすると, $u_0 = 1$ を満たす. 更に,

$$\begin{aligned}
\omega_2 \circ \operatorname{Ad} u_1(x) &= \omega_2 \circ \operatorname{Ad} v(x) \\
&= \langle \pi_{\omega_2}(e^{i\theta}xe^{-i\theta})\xi_{\omega_2}, \xi_{\omega_2} \rangle \\
&= \langle \pi_{\omega_2}(x)U\xi_{\omega_1}, U\xi_{\omega_1} \rangle \\
&= \langle \pi_{\omega_1}(x)U^*U\xi_{\omega_1}, U^*U\xi_{\omega_1} \rangle = \omega_1(x)
\end{aligned}$$

となり, Case 1 のときは良い.

Case 2. $\pi_{\omega_1}(A) \cap K(H_{\omega_1}) = \{0\}$ のとき.

$\pi_{\omega_1}(A) \cap K(H_{\omega_1}) = \{0\}$ より, $\pi_{\omega_2}(A) \cap K(H_{\omega_2}) = \{0\}$ である. x_n を A の dense sequence とする.

$F_1 := \{x_1\}$ とおき, 任意の $\varepsilon > 0$ をとる. $(F_1, \omega_1, \varepsilon/2)$ に対し, Lemma 3.7 より, ある (G_1, δ_1) が取れる. このとき, $G_1 \supset F_1$ としてもよい. (G_1, δ_1) に対し, Lemma 3.5 より, ある $u_{1,1} \in U(A)$ と, ある $\theta \in A_{sa}$ が取れて, $u_{1,1} = e^{i\theta}$ かつ

$$|\omega_1(x) - \omega_2 \circ \operatorname{Ad} u_{1,1}(x)| < \delta_1, \quad x \in G_1$$

を満たす. ここで, $u_{1,t} := e^{it\theta}$ とおくと, $u_{1,0} = 1$ である.

$F_2 := \{x_i, \operatorname{Ad} u_{1,1}^*(x_i) \mid i = 1, 2\}$ とおくと, $(F_2, \omega_2 \circ \operatorname{Ad} u_{1,1}, \varepsilon/2^2)$ に対し, Lemma 3.7 より, ある (G_2, δ_2) が取れる. このとき, $G_2 \supset G_1 \cup F_2$, $\delta_2 < \delta_1/2$ としてもよい. これに対し, ある $(u_{2,t})_{t\in[0,1]} \subset U(A)$ がとれて, $u_{2,0} = 1$,

$$\begin{aligned}
|\omega_1 \circ \operatorname{Ad} u_{2,1}(x) - \omega_2 \circ \operatorname{Ad} u_{1,1}(x)| &< \delta_2, \quad x \in G_2, \\
\|\operatorname{Ad} u_{2,t}(x) - x\| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in F_1,\ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

となる.

$F_3 := \{x_i, \operatorname{Ad} u_{2,1}^*(x_i) \mid i = 1, 2, 3\}$ とおくと, $(F_3, \omega_1 \circ \operatorname{Ad} u_{2,1}, \varepsilon/2^3)$ に対し, Lemma 3.7 より, ある (G_3, δ_3) が取れる. このとき, $G_3 \supset G_2 \cup F_3$, $\delta_3 < \delta_2/2$ としてもよい. これに対し, ある $(u_{3,t})_{t\in[0,1]} \subset U(A)$ がとれて, $u_{3,0} = 1$,

$$\begin{aligned}
|\omega_1 \circ \operatorname{Ad} u_{2,1}(x) - \omega_2 \circ \operatorname{Ad} u_{1,1} \circ \operatorname{Ad} u_{3,1}(x)| &< \delta_3, \quad x \in G_3, \\
\|\operatorname{Ad} u_{3,t}(x) - x\| &< \frac{\varepsilon}{2^2}, \quad x \in F_2,\ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

となる.

この操作を機能的に繰り返し, n が even のとき（n が odd の場合も同様）, $F_n := \{x_i, \mathrm{Ad}(u_{n-1,1}^* u_{n-3,1}^* \cdots u_{1,1}^*)(x_i) \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ とおくと, $(F_n, \omega_2 \circ \mathrm{Ad}(u_{1,1}u_{3,1}\cdots u_{n-1,1}), \varepsilon/2^n)$ に対し, Lemma 3.7 より, ある (G_n, δ_n) が取れる. このとき, $G_n \supset G_{n-1} \cup F_n$, $\delta_n < \delta_{n-1}/2$ としてもよい. これに対し, ある $(u_{n,t})_{t\in[0,1]} \subset U(A)$ がとれて, $u_{n,0} = 1$,

$$
\begin{aligned}
|\omega_1 \circ \mathrm{Ad}(u_{2,1}u_{4,1}\cdots u_{n,1})(x) - \omega_2 \circ \mathrm{Ad}(u_{1,1}u_{3,1}\cdots u_{n-1,1})(x)| < \delta_n, \quad x \in G_n, \\
\|\mathrm{Ad}\, u_{n,t}(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, \quad x \in F_n,\ t \in [0,1]
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $\alpha_n := \mathrm{Ad}(u_{1,1}u_{3,1}\cdots u_{2n-1,1}) \in \mathrm{Aut}(A)$ とおく. $x \in F_{2n}$ に対し,

$$
\|(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(x)\| = \|\mathrm{Ad}\, u_{2n+1,1}(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2^{2n}}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha_{n+k} - \alpha_n)(x)\| &\le \|(\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k-1})(x)\| + \|(\alpha_{n+k-1} - \alpha_{n+k-2})(x)\| \\
&\quad + \cdots + \|(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(x)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{2(n+k-1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{2(n+k-2)}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \\
&< \frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2n}}
\end{aligned}
$$

となる. よって, $A = \overline{F_m}^{n}$ より, 任意の $x \in A$ に対し, $\|(\alpha_{n+k} - \alpha_n)(x)\| \to 0$ $(n,\ k \to \infty)$. したがって, $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列ゆえ, ある $\alpha \in B(A)_1$ が存在して, $\alpha_n \overset{\text{pt-n}}{\to} \alpha$ となる.

一方, $\alpha_n^* := \mathrm{Ad}(u_{2n-1,1}^* \cdots u_{3,1}^* u_{2n-1,1}^*) \in \mathrm{Aut}(A)$ であり,

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha_{n+1}^* - \alpha_n^*)(x)\| &= \|\mathrm{Ad}\, u_{2n+1,1}^*(\alpha_n^*(x)) - \alpha_n^*(x)\| \\
&= \|\alpha_n^*(x) - \mathrm{Ad}\, u_{2n+1,1}(\alpha_n^*(x))\|
\end{aligned}
$$

である. 今, $x \in F_{2n}$ に対し, $\|\mathrm{Ad}\, u_{2n+1,1}^*(x) - x\| < \varepsilon/2^{2n}$ である. よって, $x \in \{x_i \mid i = 1, 2, \cdots, 2n\}$ のとき, $\alpha_n^*(x) \in F_{2n}$ なので, $\|(\alpha_{n+1}^* - \alpha_n^*)(x)\| < \varepsilon/2^{2n}$. したがって,

$$
\begin{aligned}
\|(\alpha_{n+k}^* - \alpha_n^*)(x)\| &\le \|(\alpha_{n+k}^* - \alpha_{n+k-1}^*)(x)\| + \|(\alpha_{n+k-1}^* - \alpha_{n+k-2}^*)(x)\| \\
&\quad + \cdots + \|(\alpha_{n+1}^* - \alpha_n^*)(x)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2^{2(n+k-1)}} + \frac{\varepsilon}{2^{2(n+k-2)}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{2n}} \\
&< \frac{4}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{2n}}.
\end{aligned}
$$

よって, $A = \overline{\{x_n\}}^{n}$ なので同様に $(\alpha_n^*)_{n=1}^\infty$ は Cauchy 列ゆえ, ある $\beta \in B(A)_1$ が存在して, $\alpha_n^* \overset{\text{pt-n}}{\to} \beta$ となる.

一般に, $\mathrm{Aut}(A) \ni \alpha_n \overset{\text{pt-n}}{\mapsto} \alpha \in B(A)_1$ とすると, 任意の $x \in A$ に対し $\alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n x$ より, α は isometric $*$-homomorphism だが, surjective でない. しかし, 今 $\alpha_n^* = \alpha_n^{-1}$ より, $\alpha \circ \beta = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \circ \alpha_n^* = 1$ となり, α, β は surjective なので, $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(A)$ がわかる. 同様に, ある $\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ が存在して, $\mathrm{Ad}(u_{2,1}u_{4,1}\cdots u_{2n,1}) \overset{\text{pt-n}}{\to} \gamma$ である.

今, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $t \in [n, n+1]$ に対し,

$$
\begin{aligned}
v_t &:= u_{1,1}u_{3,1}\cdots u_{2n-1,1}u_{2n+1,t-n}, \\
w_t &:= u_{2,1}u_{4,1}\cdots u_{2n,1}u_{2n+2,t-n}
\end{aligned}
$$

とおくと, $t\in[0,\infty]$ に対し, continuous path $v_t, w_t\in U(A)$ が定まり, $\alpha=\lim_{t\to\infty}\operatorname{Ad}v_t$ である. また, $v_0=u_{1,0}=1$ より, $\alpha\in\mathrm{AInn}_0(A)$ となり, 同様に, $\gamma=\lim_{t\to\infty}\operatorname{Ad}w_t$ で, $\gamma\in\mathrm{AInn}_0(A)$ である.

また, $\operatorname{Ad}v_n^*=\alpha_n^*\overset{\text{pt-n}}{\to}\alpha^{-1}$ より, $\operatorname{Ad}v_t^*\overset{\text{pt-n}}{\to}\alpha^{-1}$ である. よって, $v_0^*=1$, $v_t^*\in U(A)$ より, $\alpha^{-1}\in\mathrm{AInn}_0(A)$ となり, 同様に $\gamma^{-1}\in\mathrm{AInn}_0(A)$ である.

今 $x\in G_n$ に対し,

$$|\omega_1\circ\operatorname{Ad}(u_{2,1}u_{4,1}\cdots u_{n,1})(x)-\omega_2\circ\operatorname{Ad}(u_{1,1}u_{3,1}\cdots u_{n-1,1})(x)|<\delta_n$$

より, $A=\overline{G_n}^n$ なので, $n\to\infty$ とすれば,

$$|\omega_1\circ\gamma(x)-\omega_2\circ\alpha(x)|=0,\quad x\in A$$

である. よって, $\omega_1\circ\gamma=\omega_2\circ\alpha$ より, $\omega_1=\omega_2\circ\alpha\circ\gamma^{-1}$ かつ $\alpha\circ\gamma^{-1}\in\mathrm{AInn}_0(A)$ となり, Case 2 についても示せた. $\square$

Lemma 3.8. M を infinite dimensional von Neumann algebra とする. このとき, M は norm topology で non-separable である.

Proof. 射影族 $(e_i)_{i=1}^\infty$ を単位の分解, すなわち $\sum_{i=1}^\infty e_i=1$ とする. $a_i=i$ なる数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の部分列 $k(i)$ を考え, $f_k:=\sum_{i=1}^\infty e_{k(i)}$ とおく. ここで, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を M の dense sequence とすると, f_k に対し, ある番号 $n(k)\in\mathbb{N}$ がとれて, $\|f_k-x_{n(k)}\|<1/2$ とできる. ここで, 部分列 $k(i)$ と $l(i)$ が異なれば,

$$1=\|f_k-f_l\|<\frac{1}{2}+\|x_{n(k)}-x_{n(l)}\|+\frac{1}{2}=1+\|x_{n(k)}-x_{n(l)}\|$$

なので, $x_{n(k)}\neq x_{n(l)}$ となる. したがって, $\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\text{の部分列全体}\}\ni k(i)\to x_{n(k)}\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ は injective であるので, $\sharp 2^{\mathbb{N}}\leq\sharp\mathbb{N}$ となるが, $\sharp 2^{\mathbb{N}}>\sharp\mathbb{N}$ なので矛盾. よって, M は non-separable である. $\square$

Proposition 3.9. M を infinite dimensional von Neumann algebra, M_* を separable predual とする. このとき, ある $\omega,\varphi\in\mathrm{PS}(M)$ が存在し, 任意の $\alpha\in\mathrm{Aut}(M)$ に対し $\omega\neq\varphi\circ\alpha$ を満たす.

Proof. $c:=\sharp\mathbb{R}$, $c_0:=\sharp\mathbb{N}$ とおく.

まず, $\sharp\,\mathrm{PS}(M)\geq 2^c$ を示す. M を infinite dimensional von Neumann algebra とすると, M は少なくとも加算無限個の直交する projection $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を含む. よって,

$$M\supset\left\{\sum_{i=1}^\infty a_ie_i\;\middle|\;\sup|a_i|<\infty\right\}=C_b(\mathbb{N}).$$

$C_b(\mathbb{N})$ は unital abelian C*-algebra ゆえ, Gelfand の定理 (Theorem 2.7) より, $C_b(\mathbb{N})\cong C(\beta\mathbb{N})$ がわかる. ただし, $\beta\mathbb{N}$ は $C_b(\mathbb{N})$ の character space で, $\sharp\beta\mathbb{N}=2^c$ が知られている. $\tau\in\beta\mathbb{N}$ とすると, $C_b(\mathbb{N})$ は abelian なので, $\tau\in\mathrm{PS}(C_b(\mathbb{N}))$ である. τ は $\tau\in\mathrm{PS}(M)$ に拡張できるので, $\sharp\,\mathrm{PS}(C_b(\mathbb{N}))\leq\sharp\,\mathrm{PS}(M)$ を満たす. 以上より, $2^c=\sharp\beta\mathbb{N}=\sharp\,\mathrm{PS}(C_b(\mathbb{N}))\leq\sharp\,\mathrm{PS}(M)$ となる.

次に, X が separable Banach space ならば, $\sharp X=c$ を示す. $X\ni x\mapsto\hat{x}\in C((X^*)_1)$ は injective である. ただし, $\hat{x}(\varphi):=\varphi(x)$ とする. ここで, $(X^*)_1$ は weak*-compact Hausdorff で, X は separable なので距離付け可能である. よって, weak*-topology について, $(X^*)_1$ は separable

である．よって，$(X^*)_1$ の weak$*$-dense sequence を $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．すると，$C((X^*)_1) \ni f \mapsto (f(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}$ は injective である．よって，

$$\sharp X \le \sharp C((X^*)_1) \le \sharp \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} \right) = (\sharp\mathbb{C})_0^c = c^{c_0} = (2^{c_0})^{c_0} = 2^{c_0\cdot c_0} = 2^{c_0} = c$$

である．一方，0 でない $x \in X$ に対し，$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda x \in X$ は injective なので，$\sharp X \ge c$. 以上より，$\sharp X = c$ となる．

次に，X が separable Banach space ならば，$\sharp B(X) = c$ を示す．X の dense sequence を $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とする．$B(X) \ni T \mapsto (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X$ は injective であり，$\prod_{n\in\mathbb{N}} X \ni (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (n \mapsto x_n) \in \{f\colon \mathbb{N} \to X\}$ は bijective である．したがって，

$$\sharp B(X) \le \sharp \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X \right) = \sharp\{f\colon \mathbb{N} \to X\} = (\sharp X)^{c_0} = c^{c_0} = c$$

となる．一方，0 でない $\varphi \in B(X)$ に対し，$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda\varphi \in B(X)$ は injective なので，$\sharp B(X) \ge c$. 以上より，$\sharp B(X) = c$ となる．

更に，$\sharp\,\mathrm{Aut}(M) \le c$ を示す．今，$\mathrm{Aut}(M) \ni \alpha \mapsto \hat{\alpha} \in B(M_*)$ は injective である．ただし，$\hat{\alpha}\colon M_* \ni \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha^{-1} \in M_*$ とする．したがって，M_* は separable Banach space なので，$\sharp\,\mathrm{Aut}(M) \le \sharp B(M_*) = c$ となる．

最後に，ある $\omega, \varphi \in \mathrm{PS}(M)$ が存在し，任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ に対し $\omega \ne \varphi \circ \alpha$ を満たすことを背理法で示す．つまり，任意の $\omega, \varphi \in \mathrm{PS}(M)$ に対して，ある $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ で，$\omega = \varphi \circ \alpha$ となるものが存在すると仮定する．$\varphi \in \mathrm{PS}(M)$ を 1 つとって固定する．$\mathrm{Aut}(M) \ni \alpha \mapsto \varphi \circ \alpha \in \mathrm{PS}(M)$ は surjective であるので，$\sharp\,\mathrm{Aut}(M) \ge \sharp\,\mathrm{PS}(M)$ である．よって，$c \ge \sharp\,\mathrm{Aut}(M) \ge \sharp\,\mathrm{PS}(M) \ge 2^c$ となるが，一般に $c < 2^c$ ゆえ矛盾．よって，ある $\omega, \varphi \in \mathrm{PS}(M)$ が存在し，任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ に対し $\omega \ne \varphi \circ \alpha$ を満たす． □

4 Property 1.3 $\Longrightarrow$ Property 1.2

Theorem 4.1. Property 1.3 を満たす C*-algebra は，Property 1.2 を満たす．

以下，Theorem 4.1 を示すための補題をいくつか用意する．

Lemma 4.2. H_1, H_2 を Hilbert space とし，$\alpha\colon B(H_1) \to B(H_2)$ を $*$-isomorphism とする．このとき，ある unitary $U\colon H_1 \to H_2$ で，$\alpha(x) = UxU^*$, $x \in B(H_1)$ を満たすものが存在する．

Proof. H_1 の CONS を $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ とし，$e_{ij} := \theta_{e_i,e_j}$ とおく．e_{ii} は mininal projection より，$e_{ii}B(H_1)e_{ii} = \mathbb{C}e_{ii}$. 両辺に α を施すと，$\alpha(e_{ii})B(H_2)\alpha(e_{ii}) = \mathbb{C}\alpha(e_{ii})$ より，$\alpha(e_{ii})$ も minimal projection となる．よって，ある unit vector $f_1 \in H_2$ が存在し，$\alpha(e_{ii})H_2 = \mathbb{C}f_1$ を満たす．$f_i := \alpha(e_{i1})f_1$ とおくと，

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle \alpha(e_{i1})f_1, \alpha(e_{j1})f_1 \rangle = \delta_{ij} \tag{1}$$

が成り立つことがわかる．また，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n e_{ii} = 1_{H_1}$ であり，α は normal なので，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \alpha(e_{ii}) = 1_{H_2}$ である．よって，$\xi \in H_2$ に対し，

$$\xi = \sum_{i=1}^\infty \alpha(e_{ii})\xi \tag{2}$$

が成り立つ．今,

$$\alpha(e_{ii})f_i = \alpha(e_{ii})\alpha(e_{i1})f_1 = \alpha(e_{i1})f_1 = f_i$$

で, $\alpha(e_{ii})$ は minimal projection なので, $\alpha(e_{ii})$ は H_2 から $\mathbb{C}f_i$ への projection である．よって,

$$\alpha(e_{ii})\xi \in \mathbb{C}f_i \tag{3}$$

となり, (1), (2), (3) より, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は H_2 の CONS である．ここで, $w\colon \mathbb{C}e_1 \ni \lambda e_1 \mapsto \lambda f_1 \in \mathbb{C}f_1$ とおき, $U := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(e_{i1})we_{1i}$ とすると, U は unitary である．ここで,

$$Ue_{ij} = \alpha(e_{i1})we_{ij} = \alpha(e_{ij})U$$

より, 任意の $x \in B(H_1)$ に対し, $Ux = \alpha(x)U$ となるので, $UxU^* = \alpha(x)$ である． □

Corollary 4.3. A を C*-algebra とする．このとき, $\omega, \varphi \in \mathrm{PS}(A)$ が $\pi_\omega \overset{q}{\sim} \pi_\varphi$ を満たすならば, ある $\eta \in H_\omega$ が存在して, $\varphi(x) = \langle \pi_\omega(x)\eta, \eta\rangle, \quad x \in A$ を満たす．

Proof. $\pi_\omega \overset{q}{\sim} \pi_\varphi$ より, ある $*$-isomorphism $\alpha\colon B(H_\varphi) \to B(H_\omega)$ で, $\alpha \circ \pi_\varphi = \pi_\omega$ を満たすものが存在する．よって, Lemma 4.2 より, ある unitary $U\colon H_\varphi \to H_\omega$ で, $\alpha(x) = UxU^*$, $x \in B(H_\varphi)$ を満たすものが存在する．ここで, $\eta := U\xi_\varphi$ とおけば, $x \in A$ に対し,

$$\varphi(x) = \langle \pi_\varphi(x)\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle = \langle U^*\pi_\omega(x)U\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle = \langle \pi_\omega(x)\eta, \eta\rangle$$

となる． □

Lemma 4.4. A を C*-algebra とし, H を Hilbert space, $K \subset H$ を finite dimensional subspace とする．P を H から K への projection とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を irreducible representation とする．このとき, ある $h \in A_{sa}$ が存在し, $0 \le h \le 1$, $\pi(h)|_K = P|_K$ を満たす．ただし, $a\colon H \to K$ に対して, $a|_K$ は a の K への制限を表すものとする．

Proof. $\{e_i\}_{i=1}^m$ を K の CONS とし, それを含むように H の CONS $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ を構成する．するとこのとき, P は H から K への projection なので,

$$Pe_i = \begin{cases} e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (2)) より, ある $u \in A_{sa}$ が存在し,

$$\pi(u)e_i = \begin{cases} e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

を満たす．すると, $u \in A_{sa}$ より,

$$\pi(u^*u)e_i = \begin{cases} e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で, $|u|$ は u^*u の多項式で近似できるので,

$$\pi(|u|)e_i = \begin{cases} e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．特に, $\mathbb{C}$ 上の多項式 $p(z)$ に対し,

$$\pi(p(|u|))e_i = \begin{cases} p(1)e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ p(0)0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

である．ここで, φ を $\varphi\colon C(\sigma(|u|)) \to \mathrm{C}^*(1, |u|)$ を functional calculus (Theorem 2.8) とする．

$$f(t) := \begin{cases} 1 & (\text{if } 1 \leq t), \\ t & (\text{if } 0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とおくと, $f \in C(\sigma(|u|))$ であるので, ある多項式の列 $(p_N)_{N=1}^{\infty}$ がとれて, $f = \lim_{N\to\infty} p_N$ とできる．$f(|u|) := \varphi(f)$ とおくと,

$$\pi(p_N(|u|))e_i = \begin{cases} p_N(1)e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ p_N(0)0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なので, 両辺で $N \to \infty$ とすれば,

$$\begin{aligned} \pi(f(|u|))e_i &= \begin{cases} f(1)e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ f(0)0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \\ &= \begin{cases} e_i & (\text{if } i = 1, 2, \cdots, m), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

である．よって, $\|f(|u|)\| = \|f\| \leq 1$ より, $h := f(|u|)$ とおけば, $0 \leq h \leq 1$ で, $\pi(h)|_K = P|_K$ を満たす． $\square$

Lemma 4.5. H を Hilbelt space とし, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in H$ が $\mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \perp \mathrm{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ を満たすとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $|\langle \xi_i, \xi_j \rangle - \langle \eta_i, \eta_j \rangle| < \delta$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ならば, ある $U_0\colon \mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \to \mathrm{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ で, U_0 は unitary かつ $\|U_0\xi_i - \eta_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものが存在する．

Proof. 必要ならば並び替えることにより, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m (m \leq n)$ を linearly independent とする． linear map $T\colon \mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \to \mathrm{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ を $T(\xi_i) := \eta_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ により定める．任意の $\xi \in (\mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\})_1$ に対し, $\xi := \sum_{i=1}^m a_i\xi_i$, $a_i \in \mathbb{C}$ とすると, $(\mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\})_1 \ni \xi \mapsto \max\limits_{i=1,2,\cdots,m} |a_i| \in \mathbb{C}$ は連続である．$(\mathrm{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\})_1$ は finite dimensional normed space の bounded closed subset なので, compact である．したがって, 上の map は最大値をとる．すなわち,

$$\max_{i=1,2,\cdots,m} |a_i| \leq \max_{\|\xi\|\leq 1} \left(\max_{i=1,2,\cdots,m} |a_i| \right) =: K$$

である． 任意の ε に対し, $\delta := \min\{\varepsilon/\{K^2m^2\}, \varepsilon^2/\{Km + 1\}\}$ とすると, $\xi = \sum_{i=1}^m a_i\xi_i \in$

$(\mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\})_1$ に対し,

$$\begin{aligned}|\|\xi\|^2-\|T\xi\|^2| &= |\langle \xi,\xi\rangle - \langle T\xi, T\xi\rangle| \\ &= \left|\sum_{i,j}^m a_i\bar{a_j}(\langle \xi_i,\xi_j\rangle - \langle \eta_i,\eta_j\rangle)\right| \\ &\le m^2K^2\delta = \varepsilon\end{aligned}$$

より, $1-\varepsilon \le \|T\xi\|^2 \le 1+\varepsilon$ となるので, $\mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ に対し, $\xi/\|\xi\|$ を考えることにより,

$$(1-\varepsilon)\|\xi\|^2 \le \|T\xi\|^2 \le (1+\varepsilon)\|\xi\|^2 \tag{1}$$

であるので, T は ingective である. よって,

$$m=\dim(\mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\}) \le \dim(\mathrm{span}\{\eta_i \mid i=1,2,\cdots,n\})$$

である. 同様にして, injective な map S: $\mathrm{span}\{\eta_i \mid i=1,2,\cdots,n\} \to \mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ を作ることができるので,

$$\dim(\mathrm{span}\{\eta_i \mid i=1,2,\cdots,n\}) \le \dim(\mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\}) = m$$

である. よって, $\dim(\mathrm{span}\{\eta_i \mid i=1,2,\cdots,n\}) = m$ がわかる. (1) より, $|\langle T^*T\xi,\xi\rangle - \langle\xi,\xi\rangle| \le \varepsilon\|\xi\|^2$. よって,

$$\||T|-1\| < \|T^*T-1\| = \sup\{|\langle (T^*T-1)\xi,\xi\rangle| \mid \|\xi\|\le 1\} \le \varepsilon$$

である. ここで, T を極分解すれば, $T=U_0|T|$ なる isometry U_0: $\mathrm{span}\{\xi_i \mid i=1,2,\cdots,n\} \to \mathrm{span}\{\eta_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$ が得られる. この U_0 が求めるものであることを示す.

$$\|T-U_0\| = \|U_0|T|-U_0\| = \||T|-1\| \le \varepsilon$$

なので, $F := \max\{\|\xi_i\| \mid i=1,2,\cdots,n\}$ とおくと,

(a) $j=1,2,\cdots,m$ のとき,

$$\begin{aligned}\|U_0\xi_j-\eta_j\| &\le \|U_0\xi_j - T\xi_j\| + \|T\xi_j-\eta_j\| \\ &\le \|\varepsilon\|\|\xi_j\| \le F\varepsilon\end{aligned}$$

となる.

(b) $j=m+1,m+2,\cdots,n$ のとき, $\xi_j=\sum_{i=1}^m a_i\xi_i$ とすると, $T\xi_j=\sum_{i=1}^m a_i\eta_i$ であり,

$$\begin{aligned}\|T\xi_j-\eta_j\|^2 &= \sum_{i,j}^m a_i\bar{a_j}\langle\eta_i,\eta_j\rangle - \sum_{i=1}^m a_i\langle\eta_i,\eta_j\rangle - \sum_{j=1}^m \bar{a_j}\langle\eta_i,\eta_j\rangle + \langle\eta_i,\eta_j\rangle \\ &\le (K^2m^2\delta+Km\delta+Km\delta+\delta) + \left\|\sum_{i=1}^m a_i\xi_i-\xi_j\right\|^2 \\ &= \delta(Km+1) \le \varepsilon^2\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\|U_0\xi_j - \eta_j\| &= \|U_0\xi_j - T\xi_j\| + \|T\xi_j - \eta_j\| \\ &\leq F\varepsilon + \varepsilon \leq (F+1)\varepsilon\end{aligned}$$

なので, 後は U_0 が surjective であることを示せば良い.

$$\operatorname{ran} U_0 \cong \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} / \ker U_0 = \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

より, $\dim(\operatorname{ran} U_0) = m$ である. 一方, $\dim(\operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}) = m$ だったので, $\operatorname{ran} U_0 \subset \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ より, $\operatorname{ran} U_0 = \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, よって, U_0 が surjective であることも示せた. □

Corollary 4.6. H を Hilbelt space とし, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in H$ が $\operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \perp \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ を満たすとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $|\langle \xi_i, \xi_j \rangle - \langle \eta_i, \eta_j \rangle| < \delta$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ ならば, ある unitary $U \colon H \to H$ で, $U^2 = 1$ かつ $\|U\xi_i - \eta_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\|U\eta_i - \xi_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものが存在する.

Proof. Lemma 4.5 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $U_0 \colon \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \to \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ で, U_0 は unitary かつ $\|U_0\xi_i - \eta_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$ を満たすものが存在する. Riesz の表現定理より, ある $U_0^* \colon \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \to \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ で,

$$\langle U_0 x, y \rangle = \langle x, U_0^* y \rangle, \quad x \in \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\},\ y \in \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$$

を満たすものが存在する. U_0 は unitary なので, U_0^{-1} も unitary で, $U_0^* = U_0^{-1}$ である. また,

$$\|U_0^*\eta_i - \xi_i\| = \|\eta_i - U_0\xi_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

である.

$$H = \operatorname{span}\{\xi_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \oplus \operatorname{span}\{\eta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\} \oplus (\operatorname{span}\{\xi_i\} \oplus \operatorname{span}\{\eta_i\})^\perp$$

なので, $U := U_0 \oplus U_0^* \oplus \mathrm{id}_{(\operatorname{span}\{\xi_i\} \oplus \operatorname{span}\{\eta_i\})^\perp}$ とおくと, $U_0^* = U_0^{-1}$ なので, $U^2 = 1$ であり, $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し

$$\begin{aligned}\|U\xi_i - \eta_i\| &= \|U_0\xi_i - \eta_i\| < \varepsilon, \\ \|U\eta_i - \xi_i\| &= \|U_0^*\eta_i - \xi_i\| < \varepsilon\end{aligned}$$

となる. □

Lemma 4.7. H を Hilbert space とし, $a \in B(H)$, $\xi \in H$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$, $f \in C(\mathbb{C})$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|a\xi\| < \delta$ ならば, $\|f(a)\xi - f(0)\xi\| < \varepsilon$ を満たす.

Proof. $f(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|a\|^{k-1}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|\right)}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\|f(a)\xi - f(0)\xi\| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \|a^k \xi\| \\ &\leq \|a\|^{k-1} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right) \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

より, 多項式については良い. 連続関数は多項式で近似できるので, 主張は成立する. □

Corollary 4.8. H を Hilbert space とし, $a \in B(H)_{sa}$, $\xi \in H$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し,

$$\|a\xi - \xi\| < \delta \Rightarrow \|e^{i\pi a}\xi + \xi\| < \varepsilon \tag{1}$$

$$\|a\xi\| < \delta \Rightarrow \|e^{i\pi a}\xi - \xi\| < \varepsilon \tag{2}$$

を満たす.

Proof. まず, (1) について示す. $f(t) := e^{i\pi(t+1)}$, $a \mapsto a - 1$ を Lemma 4.7 に適用すると,

$$\|a\xi - \xi\| < \delta \Rightarrow \|e^{i\pi a}\xi - (-\xi)\| < \varepsilon$$

となる.

次に, (2) を示す. $f(t) := e^{i\pi t}$ を Lemma 4.7 に適用すると,

$$\|a\xi\| < \delta \Rightarrow \|e^{i\pi a}\xi - \xi\| < \varepsilon$$

となる. □

Lemma 4.9. A を C*-algebra, H を Hilbert space とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を irreducible representation とする. $\xi_1, \xi_2 \in H$ が $\|\xi_1\| = \|\xi_2\| = 1$ であるとする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在し, $\|\xi_1 - \xi_2\| < \delta$ ならば, ある $u \in U(A)$, $a \in A_{sa}$ で, $u = e^{ia}$, $\pi(u)\xi_1 = \xi_2$, $\|1 - e^{ita}\| < \varepsilon$, $t \in [0, 1]$ を満たすものが存在する.

Proof. Lemma 3.4 の δ をとれば, ある unitary $V \in B(H)$ で, $\|V - 1_H\| < \varepsilon$ かつ $V\xi_1 = \xi_2$ を満たすものが存在する. $\varphi\colon C(\mathrm{Sp}\, V) \to \mathrm{C}^*(V)$ を functional calculus (Theorem 2.8) とする. $\log V := \varphi(\log z)$ とし, $k := -i \log V$ とおくと,

$$\begin{aligned} k^* &= i(\log V)^* = i\varphi((\log z)^*) = i\varphi(\overline{\log z}) \\ &= i\varphi(-\log z) = -i\log V = k \end{aligned}$$

なので, k は self-adjoint である. また,

$$\|k\| = \|\log V\| = \sup\{|i \arg z| \mid z \in \mathrm{Sp}\, V\} \leq 2\varepsilon$$

である. $V = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on $\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2 \oplus (\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2)^\perp$ より, $V^i = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので, $k = -i\log V = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (3)) より, ある $a \in A_{sa}$ で, $\pi(a)|_{\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2} = k|_{\mathbb{C}\xi_1 + \mathbb{C}\xi_2}$ かつ, $\|a\| \leq 4\varepsilon$ を満たすものが存在する. $u := e^{ia}$ とおくと, u は unitary で,

$$\begin{aligned} \pi(u)\xi_1 &= e^{i\pi(a)}\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi(a))^n}{n!}\xi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!}\xi_1 \\ &= e^{ik}\xi_1 = e^{\log V}\xi_1 = V\xi_1 = \xi_2 \end{aligned}$$

である. 更に, $t \in [0, 1]$ に対して,

$$\begin{aligned} \|1 - e^{ita}\| &= \sup\{|1 - e^{its}| \mid s \in [-4\varepsilon, \varepsilon]\} \\ &\leq 1 - e^{4it\varepsilon} \leq 4t\varepsilon \leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 4.1. 任意の $F \Subset A$, $\pi_\omega(A) \cap K(H_\omega) = \{0\}$ なる $\omega \in \mathrm{PS}(A)$, $\varepsilon > 0$ をとる. $E\colon H_\omega \to \mathbb{C}\xi_\omega$ を projection とする. $(F, \pi_\omega, E, \varepsilon)$ に対して, Property 1.2 より, ある $n \in \mathbb{N}$ と, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M_{1n}(A)$ が存在して, $\|xx^*\| \leq 1$, $\pi_\omega(xx^*)E = E$, $\|\operatorname{ad} a \operatorname{Ad} x\| < \varepsilon$, $a \in F$ を満たす. $G := \{x_i x_j^* \mid i, j = 1, 2, \cdots, n\}$ とおく. $\varepsilon > 0$ に対し, Lemma 4.9 より, ある $\delta_{4.9}$ が存在する. $\delta_{4.9} > 0$ に対し, Corollary 4.8 より, ある $\delta_{4.8}$ が存在する. $\delta_{4.8}/n > 0$ に対し, Corollary 4.6 より, ある $\delta_{4.6}$ が存在する. $\delta := \min\{\delta_{4.6}, \delta_{4.8}^2/4n\}$ とおく.

$\varphi \in \mathrm{PS}(A)$ が $\pi_\varphi \overset{a}{\sim} \pi_\omega$, $|\varphi(x) - \omega(x)| < \delta$, $x \in G$ を満たすとする. すると, Corollary 4.3 より, ある $\eta \in H_\omega$ が存在して, $\varphi(x) = \langle \pi_\omega(x)\eta, \eta \rangle$, $x \in A$ を満たす. よって,

$$|\langle \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega, \pi_\omega(x_j^*)\xi_\omega \rangle - \langle \pi_\omega(x_i^*)\eta, \pi_\omega(x_j^*)\eta \rangle| < \delta, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

である. ここで, $L_{\xi_\omega} := \operatorname{span}\{\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, $L_\eta := \operatorname{span}\{\pi_\omega(x_i^*)\eta \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ とおく.

Case 1. $L_{\xi_\omega} \perp L_\eta$ のとき.

$$|\langle \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega, \pi_\omega(x_j^*)\xi_\omega \rangle - \langle \pi_\omega(x_i^*)\eta, \pi_\omega(x_j^*)\eta \rangle| < \delta_{4.6}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

なので, Lemma 4.6 より, ある unitary $U\colon H_\omega \to H_\omega$ で, $U^2 = 1$ かつ

$$\begin{aligned} \|U(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega) - \pi_\omega(x_i^*)\eta\| &< \frac{\delta_{4.8}}{2n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ \|U(\pi_\omega(x_i^*)\eta) - \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega\| &< \frac{\delta_{4.8}}{2n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. ここで, $P := (1 - U)/2$ とおくと,

$$\begin{aligned} & P(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega - \pi_\omega(x_i^*)\eta) \\ =& \frac{1}{2}\{(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega - \pi_\omega(x_i^*)\eta) - U(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega - \pi_\omega(x_i^*)\eta)\} \\ \overset{\frac{\delta_{4.8}}{2n}}{\approx}& \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega - \pi_\omega(x_i^*)\eta \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} & P(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega + \pi_\omega(x_i^*)\eta) \\ =& \frac{1}{2}\{(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega + \pi_\omega(x_i^*)\eta) - U(\pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega + \pi_\omega(x_i^*)\eta)\} \\ \overset{\frac{\delta_{4.8}}{2n}}{\approx}& 0 \end{aligned}$$

である. Lemma 4.4 より, P は $L_{\xi_\omega} \oplus L_\eta$ への projection なので, ある $h \in A_{sa}$ で, $0 \leq h \leq 1$, $\pi_\omega(h)|_{L_{\xi_\omega} \oplus L_\eta} = P$ を満たすものが存在する. $\bar{h} := \operatorname{Ad} x(h) = \sum_{i=1}^n x_i h x_i^*$ とおく. すると, $0 \leq h \leq 1$ より,

$$0 \leq \sum_{i=1}^n x_i h x_i^* \leq \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \leq 1$$

なので, $\|\bar{h}\| \leq 1$ である. したがって,

$$\|[a, \bar{h}]\| = \|(\operatorname{ad} a \operatorname{Ad} x)(h)\| \leq \varepsilon, \quad a \in F$$

となる．今,

$$\begin{aligned}\|(1-\pi_\omega(xx^*))^{\frac{1}{2}}\eta\|^2 &= \langle(1-\pi_\omega(xx^*))\eta.\eta\rangle \\ &= |1-\langle\pi_\omega(xx^*)\eta.\eta\rangle| \\ &= |\langle\pi_\omega(xx^*)\xi_\omega,\xi_\omega\rangle - \langle\pi_\omega(xx^*)\eta,\eta\rangle| < n\delta\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}\|(1-\pi_\omega(xx^*))\eta\| &\le \|(1-\pi_\omega(xx^*))^{\frac{1}{2}}\|\|(1-\pi_\omega(xx^*))^{\frac{1}{2}}\eta\| \\ &\le 1\cdot\sqrt{n\delta} \le \sqrt{\frac{\delta_{4.8}^2}{4}} = \frac{\delta_{4.8}}{2}\end{aligned}$$

である．したがって,

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\bar{h})(\xi_\omega-\eta) &= \sum_{i=1}^n \pi_\omega(x_i)P\pi_\omega(x_i^*)(\xi_\omega-\eta) \\ &\overset{n\cdot\frac{\delta_{4.8}}{2n}}{\approx} \sum_{i=1}^n \pi_\omega(x_i)\pi_\omega(x_i^*)(\xi_\omega-\eta) \\ &\overset{\frac{\delta_{4.8}}{2}}{\approx} \xi_\omega-\eta\end{aligned}$$

である．同様に,

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\bar{h})(\xi_\omega+\eta) &= \sum_{i=1}^n \pi_\omega(x_i)P\pi_\omega(x_i^*)(\xi_\omega+\eta) \\ &\overset{\frac{\delta_{4.8}}{2}}{\approx} \sum_{i=1}^n \pi_\omega(x_i)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

である．よって, $\pi_\omega(\bar{h}) \in B(H_\omega)_{sa}$ なので, Corollary 4.8 より,

$$\begin{aligned}\|e^{i\pi\pi_\omega(\bar{h})}(\xi_\omega-\eta)+(\xi_\omega-\eta)\| < \delta_{4.9} \\ \|e^{i\pi\pi_\omega(\bar{h})}(\xi_\omega+\eta)+(\xi_\omega+\eta)\| < \delta_{4.9}\end{aligned}$$

となる．よって,

$$\begin{aligned}\pi_\omega(e^{i\pi\bar{h}})\xi_\omega &= e^{i\pi\pi_\omega(\bar{h})}\left(\frac{\xi_\omega-\eta}{2}\right)+e^{i\pi\pi_\omega(\bar{h})}\left(\frac{\xi_\omega+\eta}{2}\right) \\ &\overset{\delta_{4.9}}{\approx} -\left(\frac{\xi_\omega-\eta}{2}\right)+\left(\frac{\xi_\omega+\eta}{2}\right) = \eta\end{aligned}$$

となることがわかる．ここで, $\|\pi_\omega(e^{i\pi\bar{h}})\xi_\omega\| = \|\eta\| = 1$ なので, Lemma 4.9 より, ある $u \in U(A)$, $k \in A_{sa}$ で, $u = e^{ik}$, $\pi_\omega(u)(\pi_\omega(e^{i\pi\bar{h}})\xi_\omega) = \eta$, $\|1-e^{itk}\| < \varepsilon$, $t \in [0,1]$ を満たすものが存在する．$u_t := e^{-it\pi\bar{h}}\cdot e^{-itk}$ とおき, これが求めるものである事を以下示す．$u_0 = 1$ は明らかである．

$$\begin{aligned}\omega\circ\mathrm{Ad}\,u_1(x) &= \langle\pi_\omega(e^{-i\pi\bar{h}}e^{-ik}xe^{ik}e^{i\pi\bar{h}})\xi_\omega,\xi_\omega\rangle \\ &= \langle\pi_\omega(x)\eta,\eta\rangle = \varphi(x), \quad x \in A\end{aligned}$$

なので, 後はある $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\| \operatorname{Ad} u_t(a) - a\| < \lambda\varepsilon, \quad a \in F$$

となることを示せばよい. $a \in F$ に対し,

$$\begin{aligned}
\| \operatorname{Ad} u_t(a) - a\| &= \|ae^{itk}e^{it\pi\bar{h}} - e^{itk}e^{it\pi\bar{h}}a\| \\
&= \|(ae^{itk} - e^{itk}a)e^{it\pi\bar{h}} - e^{itk}(ae^{it\pi\bar{h}} - e^{it\pi\bar{h}}a)\| \\
&\leq \|ae^{itk} - e^{itk}a\| + \|ae^{it\pi\bar{h}} - e^{it\pi\bar{h}}a\|
\end{aligned}$$

より, それぞれを評価する. まず,

$$\begin{aligned}
\|ae^{itk} - e^{itk}a\| &= \|a(e^{itk} - 1) - (e^{itk} - 1)a\| \\
&\leq 2\|a\|\|e^{itk} - 1\| \leq 2\left(\max_{a\in F}\|a\|\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

である. 一方,

$$\begin{aligned}
\|ae^{it\pi\bar{h}} - e^{it\pi\bar{h}}a\| &= \left\| a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it\pi\bar{h})^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it\pi\bar{h})^n}{n!}a \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(it\pi)^n}{n!}(a\bar{h}^n - \bar{h}^n a) \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}\|a\bar{h}^n - \bar{h}^n a\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}(\|a\bar{h}^n - \bar{h}a\bar{h}^{n-1}\| + \|\bar{h}a\bar{h}^{n-1} - \bar{h}^2a\bar{h}^{n-2}\| \\
&\qquad\qquad + \cdots + \|\bar{h}^{n-1}a\bar{h} - \bar{h}^n a\|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}n\|a\bar{h} - \bar{h}a\|\|\bar{h}\|^{n-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}n\varepsilon = e^{\pi}\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

なので, 以上より,

$$\begin{aligned}
\| \operatorname{Ad} u_t(a) - a\| &\leq 2\left(\max_{a\in F}\|a\|\right)\varepsilon + e^{\pi}\pi\varepsilon \\
&= \left(2\left(\max_{a\in F}\|a\|\right) + e^{\pi}\pi\right)\varepsilon, \quad a \in F
\end{aligned}$$

となる.

Case 2. $L_{\xi_\omega} \perp L_\eta$ でないとき.

Case 2 は, 次の Lemma と Corollary を用意した後で証明する. □

Lemma 4.10 (Glimm's Lemma)**.** H を Hilbert space とし, $A \subset B(H)$ を C*-algebra が $A \cap K(H) = \{0\}$ を満たすとする. $\varphi \in \mathrm{PS}(A)$, $F \Subset A$ をとり, $K \subset H$ を finite dimensional subspace とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある unit vector $\xi \in K^\perp$ で, $|\varphi(x) - \langle x\xi, \xi\rangle| < \varepsilon$, $x \in F$ を満たすものが存在する.

Proof. 任意の $(\varphi, F, K, \varepsilon)$ をとる．Lemma 3.3 より，ある $e \in A$ で，$0 \leq e \leq 1$, $\varphi(e) = 1$, $\|e(x-\varphi(x))e\| < \varepsilon$, $x \in F$ を満たすものが存在する．$P_K \colon H \to K$ を projection とすると，$P_{K^\perp} = 1 - P_K$ である．$q \colon B(H) \to B(H)/K(H)$ を quotient map とすると，$q(P_{K^\perp}) = q(1-P_K) = q(1)$ なので，

$$q(P_{K^\perp} e P_{K^\perp} - e) = q(P_{K^\perp}) q(e) q(P_{K^\perp}) - q(e) = q(e) - q(e) = 0$$

より，$P_{K^\perp} e P_{K^\perp} - e \in K(H)$ である．また，$a \in A$ に対し，$q(a) = 0$ とすると，$a \in K(H)$ より，$a \in A \cap K(H) = 0$ なので，$q|_A$ は injective であることがわかる．したがって，

$$1 \geq \|P_{K^\perp} e P_{K^\perp}\| \geq \|q(P_{K^\perp} e P_{K^\perp})\| = \|q(e)\| = \|q|_A(e)\| = \|e\| = 1$$

なので，$\|P_{K^\perp} e P_{K^\perp}\| = 1$ である．よって，

$$\begin{aligned} 1 = \|P_{K^\perp} e P_{K^\perp}\| &= \sup\{\langle P_{K^\perp} e P_{K^\perp} \xi, \xi \rangle \mid \|\xi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle e\xi, \xi \rangle \mid \|\xi\| \leq 1,\ \xi \in K^\perp\} \\ &= \sup\{\langle e\xi, \xi \rangle \mid \|\xi\| = 1,\ \xi \in K^\perp\} \end{aligned}$$

より，ある unit vector $\xi \in K^\perp$ で，$1 - \langle e\xi, \xi \rangle < \varepsilon^2$ を満たすものが存在する．このとき，

$$\begin{aligned} \|e\xi - \xi\|^2 &= \langle e^2\xi, \xi \rangle - 2\langle e\xi, \xi \rangle + \langle \xi, \xi \rangle \\ &\leq 1 - \langle e\xi, \xi \rangle < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

なので，$\|e\xi - \xi\| < \varepsilon$ である．よって，$M := \max_{x \in F} \|x\|$ とおくと，$x \in F$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \langle \varphi(x)\xi, \xi \rangle &\overset{2M\varepsilon}{\approx} \langle \varphi(x)e\xi, e\xi \rangle = \langle e\varphi(x)e\xi, \xi \rangle \\ &\overset{\varepsilon}{\approx} \langle exe\xi, \xi \rangle = \langle xe\xi, e\xi \rangle \overset{2M\varepsilon}{\approx} \langle x\xi, \xi \rangle \end{aligned}$$

なので，

$$|\varphi(x) - \langle x\xi, \xi \rangle| \leq (4M+1)\varepsilon, \quad x \in F$$

□

Corollary 4.11. A を C*-algebra とし，$\omega \in \mathrm{PS}(A)$ が，$\pi_\omega(A) \cap K(H_\omega) = \{0\}$ を満たすとする．$F \Subset A$ をとり，$K \subset H_\omega$ を finite dimensional subspace とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある unit vector $\xi \in K^\perp$ で，$|\omega(x) - \langle \pi_\omega(x)\xi, \xi \rangle| < \varepsilon$, $x \in F$ を満たすものが存在する．

Proof. $\omega'(\pi_\omega(x)) := \omega(x)$, $x \in A$ とすると，$\omega' \in \mathrm{PS}(\pi_\omega(A))$ である．$(\pi_\omega(A), \omega', \pi_\omega(F), K, \varepsilon)$ について，Lemma 4.10 より，ある unit vector $\xi \in K^\perp$ で，$|\omega'(x) - \langle x\xi, \xi \rangle| < \varepsilon$, $x \in \pi_\omega(F)$ を満たすものが存在する．よって，$|\omega(x) - \langle \pi_\omega(x)\xi, \xi \rangle| < \varepsilon$, $x \in F$ を満たす． □

Proof of Theorem 4.1.
Case 2. $L_{\xi_\omega} \perp L_\eta$ でないとき．

$K := \mathrm{span}\{\pi_\omega(x)\xi_\omega, \pi_\omega(x)\eta \mid x \in G\}$ とおくと，$\pi_\omega(A) \cap K(H_\omega) = \{0\}$ なので，Corollary 4.11 より，$(A, \omega, G, K, \delta/2)$ に対し，ある unit vector $\zeta \in K^\perp$ で，

$$|\omega(x) - \langle \pi_\omega(x)\zeta, \zeta \rangle| < \frac{\delta}{2}, \quad x \in G \tag{1}$$

を満たすものが存在する. 初めから, $|\omega(x) - \langle \pi_\omega(x)\eta, \eta\rangle| < \delta/2$, $x \in G$ としておけば,

$$|\langle \pi_\omega(x)\zeta, \zeta\rangle - \langle \pi_\omega(x)\eta, \eta\rangle| < \delta, \quad x \in G \tag{2}$$

となる. また, $\zeta \in K^\perp$ より, $\langle \pi_\omega(x_i x_j^*)\xi_\omega, \zeta\rangle = 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ なので,

$$\langle \pi_\omega(x_j^*)\xi_\omega, \pi_\omega(x_i^*)\zeta\rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

であり, 同様に, $\langle \pi_\omega(x_i x_j^*)\eta, \zeta\rangle = 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$ なので,

$$\langle \pi_\omega(x_j^*)\eta, \pi_\omega(x_i^*)\zeta\rangle = 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

である. $L_\zeta := \mathrm{span}\{\pi_\omega(x_i^*)\zeta \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ とおくと, (1), (3) より,

$$\begin{cases} |\langle \pi_\omega(x_i^*)\xi_\omega, \pi_\omega(x_j^*)\xi_\omega\rangle - \langle \pi_\omega(x_i^*)\zeta, \pi_\omega(x_j^*)\zeta\rangle| < \delta, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \\ L_{\xi_\omega} \perp L_\zeta, \end{cases} \tag{5}$$

(2), (4) より,

$$\begin{cases} |\langle \pi_\omega(x_i^*)\zeta, \pi_\omega(x_j^*)\zeta\rangle - \langle \pi_\omega(x_i^*)\eta, \pi_\omega(x_j^*)\eta\rangle| < \delta, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \\ L_\zeta \perp L_\eta \end{cases} \tag{6}$$

を得る. $\psi(x) := \langle \pi_\omega(x)\zeta, \zeta\rangle$, $x \in A$ とおく. (5), Case 1 の結果より, ある $v_t \in u(A)$ で, $v_0 = 1$, $\psi = \omega \circ \mathrm{Ad}\, v_1$,

$$\|\mathrm{Ad}\, v_t(a) - a\| < \varepsilon, \quad a \in F$$

を満たすものが存在する. 同様に, (6), Case 1 の結果より, ある $w_t \in u(A)$ で, $w_0 = 1$, $\varphi = \psi \circ \mathrm{Ad}\, w_1$,

$$\|\mathrm{Ad}\, w_t(a) - a\| < \varepsilon, \quad a \in F$$

を満たすものが存在する. よって, $u_t := v_t w_t$ とおけば, $u_0 = 1$,

$$\omega \circ \mathrm{Ad}\, u_1 = \omega \circ \mathrm{Ad}\, v_1 w_1 = \omega \circ \mathrm{Ad}\, v_1 \circ \mathrm{Ad}\, w_1 = \psi \circ \mathrm{Ad}\, w_1 = \varphi$$

であり, 更に任意の $t \in [0, 1]$ と, $a \in F$ に対して,

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Ad}\, u_t(a) - a\| &= \|a v_t w_t - v_t w_t a\| \\ &\leq \|(a v_t - v_t a) w_t\| + \|v_t(a w_t - w_t a)\| \\ &= \|a v_t - v_t a\| + \|a w_t - w_t a\| \\ &= \|\mathrm{Ad}\, v_t(a) - a\| + \|\mathrm{Ad}\, w_t(a) - a\| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

も満たす. □

5 Any separable C*-algebra satisfies Property 1.3

Definition 5.1. A を C*-algebra とする. $\mathrm{Bil}(A)$ を,

$$\mathrm{Bil}(A) := \{V \colon A \times A \to \mathbb{C} \mid V \text{ is bilinear }, \|V\| < \infty\}$$

により定める．ただし, $\|V\| := \sup\{|V(a,b)| \mid a, b \in A_1\}$ とする．

また, $A \odot A$ に射影 norm を

$$\|S\|_\Lambda := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\|b_i\| \;\middle|\; S = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right\}$$

によって定め, 完備化したものを $A \widehat{\otimes} A$ と書く．

また, M を von Neumann algebra とする．$\mathrm{Bil}_\sigma(M)$ を,

$$\mathrm{Bil}_\sigma(M) := \{V \in \mathrm{Bil}(M) \mid V \text{ is separately } \sigma\text{-weakly continuous}\}$$

とする．

Lemma 5.2. A を C*-algebra とする．すると, $\mathrm{Bil}(A) \simeq (A \widehat{\otimes} A)^*$ である．

Proof. $\omega\colon \mathrm{Bil}(A) \to (A \widehat{\otimes} A)^*$ を以下のようにして定める．

$V \in \mathrm{Bil}(A)$ に対して, $\omega(V)(a \otimes b) := V(a,b)$, $a,\ b \in A$ とすると, linear functional $\omega(V)\colon A \odot A \to \mathbb{C}$ が定まり, $\|\omega(V)\| = \|V\|_\Lambda$ である．今, $\omega(V)$ は bounded なので, $\omega(V)\colon A \widehat{\otimes} A \to \mathbb{C}$ に拡張できる．よって, $\omega(V) \in (A \widehat{\otimes} A)^*$ なので, $\omega\colon \mathrm{Bil}(A) \to (A \widehat{\otimes} A)^*$ が定まった．この ω は, surjective であることを示す．任意の $\psi \in (A \widehat{\otimes} A)^*$ に対し, $U(a,b) := \psi(a \otimes b)$, $a,\ b \in A$ と定めると $U \in \mathrm{Bil}(A)$ であり,

$$\omega(U)(a \otimes b) = U(a,b) = \psi(a \otimes b)$$

より, $\omega(U) = \psi$ なので, ω は surjective となる．以上より, ω は isometry isomorphism なので, $\mathrm{Bil}(A) \simeq (A \widehat{\otimes} A)^*$ となる． □

以下, $\mathrm{Bil}(A)$ と $(A \widehat{\otimes} A)^*$ を自然に同一視する．

Definition 5.3. A を C*-algebra とする．$a \in A$ に対し $L_a\colon A \widehat{\otimes} A \to A \widehat{\otimes} A$ を,

$$L_a(b \otimes c) := ab \otimes c, \quad b,\ c \in A$$

により定める．同様に, $R_a\colon A \widehat{\otimes} A \to A \widehat{\otimes} A$ を,

$$R_a(b \otimes c) := b \otimes ca, \quad b,\ c \in A$$

とする．すると, L_a, R_a は bounded bilinear で, $\|L_a\| = \|R_a\| = \|a\|$ である．また, $p\colon A \widehat{\otimes} A \to A$ を,

$$p(b \otimes c) := bc, \quad b,\ c \in A$$

とする．すると, p は norm-decreasing な linear map である．

M を von Neumann algebra とし, $\varphi\colon \mathrm{Bil}(M) \to l^\infty(M_1)$ を以下のように定める．$V \in \mathrm{Bil}(M)$, $a \in M_1$ に対し, $\varphi(V)(a) := V(a^*, a)$ とすると,

$$\begin{aligned}\|\varphi(V)\| &= \sup\{|\varphi(V)(a)| \mid \|a\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|V(a^*, a)| \mid \|a\| \leq 1\} \leq \|V\|\end{aligned}$$

より, $\varphi(V)$ は bounded なので, $\varphi(V) \in l^\infty(M_1)$ となり, $\varphi\colon \mathrm{Bil}(M) \to l^\infty(M_1)$ が定義できた．この φ を以下用いることにする．

次の結果は, Haagerup [8, Theorem 2.1] によるものである．

Theorem 5.4 (Haagerup)**.** M を injective von Neumann algebra とする．このとき, ある I(M) 上の mean m で,

$$m(\varphi(L_a^*V)|_{I(M)}) = m(\varphi(R_a^*V)|_{I(M)}), \quad V \in \mathrm{Bil}_\sigma(M),\ a \in M$$

を満たすものが存在する． ただし, $M \subset B(H)$ が injective であるとは, ある linear map $E\colon B(H) \to M$ で, $E(a) = a$, $a \in M$ かつ $\|E(b)\| \leq b$, $b \in B(H)$ を満たすものが存在することをいう．また, m が集合 X 上の mean であるとは, $m \in \mathrm{S}(l^\infty(X))$ を満たすことである．

この定理を用いて, 任意の separable C*-algebra は Property 1.3 を満たすことを示す．

Lemma 5.5. M, N を von Neumann algebras とし, $\pi\colon M \to N$ を normal $*$-homomorphism とする．このとき, ある projection $e \in Z(M)$ で, $Me \simeq \pi(M)$ を満たすものが存在する．

Proof. $\ker \pi$ は σ-weakly closed ideal なので, ある projection $z \in Z(M)$ で, $\ker \pi = Mz$ を満たすものが存在する．すると, $M(1-z) \ni x(1-z) \mapsto \pi(x) \in \pi(M)$ は $*$-isomorphism であることがわかるので, $e := 1 - z$ とすれば, $Me \simeq \pi(M)$ がわかる． □

Lemma 5.6. X を Banach space とし, S を X の subset とする．このとき, $\overline{\operatorname{co} S}^n = \overline{\operatorname{co} S}^w$ を満たす．

Proof. $\overline{\operatorname{co} S}^n \subset \overline{\operatorname{co} S}^w$ は明らかなので, $\overline{\operatorname{co} S}^n \supset \overline{\operatorname{co} S}^w$ を背理法で示す． ある $x \in \overline{\operatorname{co} S}^w$ で $x \notin \overline{\operatorname{co} S}^n$ となるものがあったとする．Hahn–Banach (Theorem 2.6) より, ある weakly continuous functional $\tau\colon X \to \mathbb{C}$ と, ある $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\operatorname{Re} \tau(y) \leq t < \operatorname{Re} \tau(x), \quad y \in \overline{\operatorname{co} S}^n$$

を満たすものが存在する．$x \in \overline{\operatorname{co} S}^w$ より, $x_\lambda \in \operatorname{co} S$ で $x_\lambda \overset{\mathrm{w}}{\to} x$ なる net x_λ を取ると, 特に

$$\operatorname{Re} \tau(x_\lambda) \leq t < \operatorname{Re} \tau(x) \quad \text{for all } \lambda$$

を満たしている．しかし, $\tau(x_\lambda) \to \tau(x)$ であったので,

$$\operatorname{Re} \tau(x) \leq t < \operatorname{Re} \tau(x)$$

となり矛盾である．以上より, $\overline{\operatorname{co} S}^n \supset \overline{\operatorname{co} S}^w$ がわかった． □

Lemma 5.7. A を C*-algebra とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を non-degenetate representation とする．このとき, $\pi(A)''$ が injective ならば, ある net $T_\lambda \in A \odot A$ で, 以下の 1〜3 を満たすものが存在する．

1. $T_\lambda \in \operatorname{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \leq 1\}$
2. $\|L_a T_\lambda - R_a T_\lambda\|_\Lambda \to 0, \quad a \in A$
3. $\pi(p(T_\lambda)) \overset{\sigma\text{-w}}{\to} 1$ in $B(H)$

Proof. まず, $\rho\colon A \to B(K)$ を universal representation とすると, ある $\tilde{\rho}\colon A^{**} \to \rho(A)''$ で, surjective, isometic かつ $\sigma(A^{**}, A^*)$ to σ-weakly continuous で, 下の可換図式を満たすものが存在する．

$$\begin{tikzcd} & A^{**} \arrow[d, "\tilde{\rho}"] \\ A \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\rho"'] & \rho(A)'' \end{tikzcd}$$

また, universality より, ある $\tilde{\pi}\colon \rho(A)'' \to \pi(A)''$ で, σ-weakly continuous かつ, 下の可換図式を満たすものが存在する.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"'] \arrow[dr, "\pi"'] & \rho(A)'' \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ & \pi(A)'' \end{tikzcd}$$

よって, $\pi' := \tilde{\pi} \circ \tilde{\rho}$ とおくと, π' は surjective かつ $\sigma(A^{**}, A^*)$ to σ-weakly continuous で,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[dr, "\pi"'] & A^{**} \arrow[d, "\pi'"] \\ & \pi(A)'' \end{tikzcd}$$

を満たす. よって, A^{**} と $\rho(A)''$ を同一視すれば, Lemma 5.5 より, ある projection $e \in Z(A^{**})$ で, $A^{**}e \simeq \pi(A)'' =: M$ を満たすものが存在する. また, Lemma 5.5 の proof より, $e = 1_M$ であることもわかる.

ここで, M は injective なので, Theorem 5.4 より, ある I(M) 上の mean m で,

$$m(\varphi(L_a^* V)|_{I(M)}) = m(\varphi(R_a^* V)|_{I(M)}), \quad V \in \mathrm{Bil}_\sigma(M),\ a \in M$$

を満たすものが存在する.

次に, [9, Proposition 2.2] と [10, Lemma 2.1] により $V \in \mathrm{Bil}(A)$ は一意に jointly σ-weakly continuous な $\widetilde{V} \in \mathrm{Bil}_\sigma(A^{**})$ に拡張できることがわかる. また, このとき $\|\widetilde{V}\| = \|V\|$ とできる. よって, $V \in \mathrm{Bil}(A)$ に対して, $\omega(V) := m(\varphi(\widetilde{V}|_M)|_{I(M)})$ とすると, $\omega \in (\mathrm{Bil}(A))^* = (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^{**}$ である. ただし, $\varphi\colon \mathrm{Bil}(M) \to l^\infty(M_1)$ は $V \in \mathrm{Bil}(M)$, $a \in M_1$ に対し, $\varphi(V)(a) := V(a^*, a)$ としていた.

このとき, 次の 1'〜3' が成り立つ.

1' $\omega \in \overline{\mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}}^{w^*}$

2' $L_a^{**}\omega = R_a^{**}\omega, \quad a \in A$

3' $p^{**}(\omega) = e$ in A^{**}

まず 1' を背理法で示す. $\omega \notin \overline{\mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}}^{w^*}$ とする. Hahn–Banach (Theorem 2.6) より, ある w*-continuous linear functional $\tau\colon (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^{**} \to \mathbb{C}$ と, ある $t \in \mathbb{R}$ で,

$$\mathrm{Re}\langle y, \tau\rangle \le t < \mathrm{Re}\langle \omega, \tau\rangle, \quad y \in \overline{\mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}}^{w^*}$$

を満たすものが存在する. この τ に対して, ある $\theta \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^*$ が存在して, $\tau = \hat{\theta}$ を満たす. ただし, $\hat{\theta}(f) := f(\theta)$, $f \in A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ とする. すると,

$$\mathrm{Re}\langle y, \theta\rangle \le t < \mathrm{Re}\langle \omega, \theta\rangle, \quad y \in \overline{\mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}}^{w^*}$$

となり, 特に,

$$\mathrm{Re}\langle x \otimes x^*, \theta\rangle \le t < \mathrm{Re}\langle \omega, \theta\rangle, \quad x \in A_1$$

である．ここで，$u \in I(M)$ について，$u \in I(M) \subset (A^{**})_1$ なので，Kaplansky (Theorem 2.9 (3)) より，ある $a_\alpha \in A_1$ で，$a_\alpha \overset{\mathrm{s}^*}{\to} u$ を満たすものが存在する．また，$\theta \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^* = \mathrm{Bil}(A)$ より，$\widetilde{\theta} \in \mathrm{Bil}(A^{**})$ に拡張できるので，

$$\mathrm{Re}\langle a_\alpha^* \otimes a_\alpha, \widetilde{\theta}\rangle \le t < \mathrm{Re}\langle \omega, \theta\rangle \quad \text{for all } \alpha$$

となる．$\alpha \nearrow$ とすれば，$\widetilde{\theta}$ は jointly σ-weakly continuous なので，任意の $u \in I(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle u^* \otimes u, \widetilde{\theta}\rangle \le t < \mathrm{Re}&\langle \omega, \theta\rangle \\ &= \mathrm{Re}\, m(\varphi(\widetilde{\theta}|_M)(\cdot)) \\ &= \mathrm{Re}\, m(\widetilde{\theta}(\cdot^*, \cdot))\end{aligned}$$

なので，

$$\mathrm{Re}\, m(\widetilde{\theta}(\cdot^*, \cdot)) \le t < \mathrm{Re}\, m(\widetilde{\theta}(\cdot^*, \cdot))$$

より矛盾である．よって，1' が示せた．

次に 2' を示す．$V \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^* = \mathrm{Bil}(A)$ に対して，

$$(L_a^{**}\omega)(V) = \omega(L_a^* V) = \omega(VL_a) = m(\varphi(\widetilde{VL_a}|_M)|_{I(M)})$$

である．ここで，$c, d \in \iota(A)$，$e_\lambda \overset{\sigma\text{-w}}{\to} e$，$w_\lambda \in \iota(A)$ に対し，

$$\begin{aligned}(L_{ae}^* \widetilde{V}|_M)(ce, de) &= \widetilde{V}|_M(ace, de) \\ &= \widetilde{V}(ace, de) \\ &= \widetilde{V}\left(\sigma\text{-w}\lim_\lambda (ace_\lambda, de_\lambda)\right) \\ &= \sigma\text{-w}\lim_\lambda V(ace_\lambda, de_\lambda) \\ &= \sigma\text{-w}\lim_\lambda \widetilde{VL_a}(ce_\lambda, de_\lambda) \\ &= \widetilde{VL_a}(ce, de) \\ &= \widetilde{VL_a}|_M(ce, de)\end{aligned}$$

なので，$\iota(A)$ は A^{**} において σ-weakly dense であることと，$L_{ae}^*\widetilde{V}|_M$，$\widetilde{VL_a}|_M$ はそれぞれ jointly σ-weakly continuous であることより，

$$\widetilde{VL_a}|_M = L_{ae}^* \widetilde{V}|_M$$

となる．更に，Theorem 5.4 より，

$$\begin{aligned}(L_a^{**}\omega)(V) &= m(\varphi(L_{ae}^*\widetilde{V}|_M)|_{I(M)}) \\ &= m(\varphi(R_{ae}^*\widetilde{V}|_M)|_{I(M)})\end{aligned}$$

である．同様に，

$$(R_a^{**}\omega)(V) = m(\varphi(R_{ae}^*\widetilde{V}|_M)|_{I(M)})$$

なので，$L_a^{**}\omega = R_a^{**}\omega$ となり，2' が従う．

次に, 3' を示す. Kaplansky (Theorem 2.9 (3)) より, $\iota(A)_1$ は A_1^{**} において strongly dense なので, $a \in M$ に対し, ある $\iota(A)_{\|a\|}$ の net $\iota(a_\lambda)$ で, $\iota(a_\lambda) \xrightarrow{\mathrm{s}} a$ を満たすものが取れる. 同様に, $b \in M$ に対し, ある $\iota(A)_{\|b\|}$ の net $\iota(b_\mu)$ で, $\iota(b_\mu) \xrightarrow{\mathrm{s}} b$ を満たすものが取れる. よって, $f \in A^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\widetilde{p^*(f)}(a,b) &= \widetilde{p^*(f)}\left(\text{s-}\lim_{\lambda,\mu}(\iota(a_\lambda), \iota(b_\mu))\right) \\ &= \text{s-}\lim_{\lambda,\mu} p^*(f)(\iota(a_\lambda), \iota(b_\mu)) \\ &= \sigma(A^{**}, A^*)\text{-}\lim_{\lambda,\mu}\langle f, \iota(a_\lambda b_\mu)\rangle = \langle f, ab\rangle\end{aligned}$$

である. よって, 特に $v \in I(M)$ に対し,

$$g(v) := \widetilde{p^*(f)}|_M(v^*, v) = \widetilde{p^*(f)}(v^*, v) = \langle f, v^*v\rangle = \langle f, 1_M\rangle = \langle f, e\rangle$$

なので, $g \in l^\infty(I(M))$ は定数関数である. よって,

$$m(g(\cdot)) = m(\langle f, ab\rangle 1_{I(M)}) = \langle f, ab\rangle$$

なので, 任意の $f \in A^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle p^{**}\omega, f\rangle &= \langle \omega, p^*(f)\rangle \\ &= m(\varphi(\widetilde{p^*(f)}|_M)|_{I(M)}) = m(g(\cdot)) = \langle f, e\rangle\end{aligned}$$

より, $p^{**}\omega = e$ となり, 3' が示せた.

以上より, 1'〜3' がわかったので, ここから 1〜3 を示す. 1' より, $\omega \in \overline{\mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}}^{w^*}$ だったので, ある $T_\lambda \in \mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}$ で $\iota(T_\lambda) \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \omega$ in $(A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^{**}$ を満たす net が取れる. ここで, $L_aT_\lambda - R_aT_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ in $A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ を示そう. まず, 任意の $f \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^*$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle \iota(L_aT_\lambda), f\rangle &= \langle L_aT_\lambda, f\rangle = \langle T_\lambda, L_a^* f\rangle \\ &= \langle \iota(T_\lambda), L_a^* f\rangle = \langle L_a^{**}\iota(T_\lambda), f\rangle\end{aligned}$$

より, $\iota(L_aT_\lambda) = L_a^{**}\iota(T_\lambda)$ なので, 任意の $f \in (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^*$ に対し, 2' より,

$$\begin{aligned}\langle L_aT_\lambda - R_aT_\lambda, f\rangle &= \langle \iota(L_aT_\lambda - R_aT_\lambda), f\rangle \\ &= \langle L_a^{**}\iota(T_\lambda) - R_a^{**}\iota(T_\lambda), f\rangle \\ &= \langle \iota(T_\lambda), L_a^* f\rangle - \langle \iota(T_\lambda), R_a^* f\rangle \\ &\to \langle \omega, L_a^* f\rangle - \langle \omega, R_a^* f\rangle \\ &= \langle L_a^{**}\omega - R_a^{**}\omega, f\rangle = 0\end{aligned}$$

なので, $L_aT_\lambda - R_aT_\lambda \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$ が言えた.

ここで, 任意の $F \Subset A$, $G \Subset (A \mathbin{\widehat{\otimes}} A)^*$ をとり,

$$\begin{aligned}C_{F,G} &:= \left\{ \bigoplus_{a\in F}(L_aT - R_aT) \oplus \bigoplus_{\varphi\in G}(\iota(T)\varphi - \varphi(\omega)) \;\middle|\; T \in \mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\} \right\} \\ &\subset \bigoplus_{a\in F}(A \mathbin{\widehat{\otimes}} A) \oplus \bigoplus_{\varphi\in G}\mathbb{C}\end{aligned}$$

とおく．ただし, $\bigoplus_{a\in F}(A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)\oplus\bigoplus_{\varphi\in G}\mathbb{C}$ には l^1norm を入れるものとする．すると, $C_{F,G}$ は convex で, Lemma 5.6 より, $0\in\overline{C_{F,G}}^w=\overline{C_{F,G}}^n$ である．したがって, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, ある $T^\varepsilon_{F,G}\in\mathrm{co}\{x\otimes x^*\mid x\in A,\|x\|\leq 1\}$ で,

$$\left\|\bigoplus_{a\in F}(L_aT^\varepsilon_{F,G}-R_aT^\varepsilon_{F,G})\oplus\bigoplus_{\varphi\in G}(\iota(T^\varepsilon_{F,G})\varphi-\varphi(\omega))\right\|<\varepsilon$$

を満たすものが取れる．よって特に,

$$\begin{aligned}&\|L_aT^\varepsilon_{F,G}-R_aT^\varepsilon_{F,G}\|_\Lambda<\varepsilon,\quad a\in F\\&|\iota(T^\varepsilon_{F,G})\varphi-\varphi(\omega))|<\varepsilon,\quad \varphi\in G\end{aligned}$$

となる．ここで, A の finite set, $(A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^*$ の finite set の組 $(\cdot,\cdot)$ に, 順序を

$$(F_1,G_1)\geq(F_2,G_2)\overset{\text{defn}}{\iff}F_1\supset F_2\text{かつ}\ G_1\supset G_2$$

と定める．すると, 任意の $a\in A$, $\varphi\in(A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^*$ に対して, $a\in F_0$, $\varphi\in G_0$ を満たすように (F_0,G_0) を選べば, $(F,G)\geq(F_0,G_0)$ ならば,

$$\begin{aligned}&\|L_aT^\varepsilon_{F,G}-R_aT^\varepsilon_{F,G}\|_\Lambda<\varepsilon\\&|\iota(T^\varepsilon_{F,G})\varphi-\varphi(\omega))|<\varepsilon\end{aligned}$$

を満たす．よって, 適当に添え字を取り替えることによって, ある $T_\lambda\in\mathrm{co}\{x\otimes x^*\mid x\in A,\|x\|\leq 1\}$ なる net で,

$$\begin{aligned}&\|L_aT_\lambda-R_aT_\lambda\|_\Lambda\to 0,\quad a\in A\\&\iota(T_\lambda)\overset{\mathrm{w}^*}{\to}\omega\ \text{in}\ (A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^{**}\end{aligned}$$

を満たすものが取れる． この T_λ が求めるものである． 1 と 2 は既に示したので, 後は 3 を示せばよい． $p^{**}\colon(A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^{**}\to A^{**}$ は $\sigma((A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^{**},(A\mathbin{\widehat{\otimes}}A)^*)$ to $\sigma(A^{**},A^*)$ continuous なので, $p^{**}(\iota(T_\lambda))\overset{\sigma(A^{**},A^*)}{\longrightarrow}p^{**}(\omega)=e$ であり, $p^{**}(\iota(T_\lambda))=\iota(pT_\lambda)$ なので, $\iota(pT_\lambda)\overset{\sigma(A^{**},A^*)}{\longrightarrow}e$ を得る．今,

$$\begin{tikzcd}A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[dr, "\pi"'] & A^{**} \arrow[d, "\pi'"] \\ & \pi(A)''\end{tikzcd}$$

で, π' は $\sigma(A^{**},A^*)$ to σ-weakly continuous なので,

$$\pi(pT_\lambda)=\pi'(\iota(pT_\lambda))\overset{\sigma\text{-w}}{\to}\pi'(e)=1$$

より, 3 も示せた． □

Lemma 5.8. A を C*-algebra とし, $\pi\colon A\to B(H)$ を irreducible representation とする．$\varepsilon>0$ に対し, $S\in B(H)$ が $\|S\|\leq\varepsilon$ であるとし, E を H 上の finite rank projection とする．このとき, ある $a\in A$ で, $\|a\|\leq 4\varepsilon$, $\pi(a)E=SE$, $E\pi(a)=ES$ を満たすものが存在する．

Proof. $S = \mathrm{Re}\, S + i \,\mathrm{Im}\, S$ とし, Kadison's Transitivity (Theorem 2.13 (3)) より, ある $b, c \in A_{sa}$ で, $\|b\| \leq 2\varepsilon$, $\|c\| \leq 2\varepsilon$ かつ

$$\pi(b)E = (\mathrm{Re}\, S)E$$
$$\pi(c)E = (\mathrm{Im}\, S)E$$

を満たすものが存在する. 2 つの式の両辺で $*$ をとれば,

$$E\pi(b) = E(\mathrm{Re}\, S)$$
$$E\pi(c) = E(\mathrm{Im}\, S)$$

であることもわかる. よって, $a := b + ic$ とおくと, $\|a\| \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$ であり,

$$\pi(a)E = \pi(b)E + i\pi(c)E = (\mathrm{Re}\, S)E + i(\mathrm{Im}\, S)E = SE$$
$$E\pi(a) = E\pi(b) + iE\pi(c) = E(\mathrm{Re}\, S) + iE(\mathrm{Im}\, S) = ES$$

となる. □

Corollary 5.9. A を C*-algebra とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を irreducible representation とする. $\varepsilon > 0$ に対し, $S \in B(H)$ が $\|S - 1\| \leq \varepsilon$ であるとし, E を H 上の finite rank projection とする. このとき, ある $a \in A + \mathbb{C}1$ で, $\|a - 1\| \leq 4\varepsilon$, $\pi(a)E = SE$, $E\pi(a) = ES$ を満たすものが存在する.

Proof. Lemma 5.8 の S を $S - 1$ に, a を $a + 1$ にすればよい. □

Lemma 5.10. A を C*-algebra とし, $\pi\colon A \to B(H)$ を irreducible representation とする. また, E を H 上の finite rank projection とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, 以下を満たす.

もし $\|a\| \leq 1$ なる $a \in A^+$ が, $\|\pi(a)E - E\| < \delta$ を満たすならば, ある $b \in A + \mathbb{C}1$ で, $\|b - 1\| < \varepsilon$, $\|bab^*\| \leq 1$, $\pi(bab^*)E = E$ を満たすものが存在する.

Proof.

$$\begin{cases} K_0 & := \mathrm{ran}\, E \\ K_1 & := \mathrm{ran}\, E^{\perp}\pi(a)E \\ K_2 & := (K_0 \oplus K_1)^{\perp} \end{cases}$$

とおくと, $H = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2$ である. すると, $\xi \in H$ に対し,

$$\pi(a)E\xi = E\pi(a)E\xi + E^{\perp}\pi(a)E\xi \in K_0 \oplus K_1$$

なので, $\pi(a)K_0 \subset K_0 \oplus K_1$ がわかる. よって, $\pi(a) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ on $K_0 \oplus K_1 \oplus K_2$ とおくと, $a_{31} = 0$ であり, $a \in A_{sa}$ より $a_{13} = 0$ となる. ここで,

$$\|E\pi(a)E - E\| \leq \|\pi(a)E - E\| < \delta$$

より,

$$a_{11} = E\pi(a)E \overset{\delta}{\approx} E = 1_{K_0}$$

であり, また,

$$\|E\pi(a)E^{\perp} - EE^{\perp}\| \leq \|E\pi(a) - E\| = \|\pi(a)E - E\| < \delta$$

より,

$$a_{12} = a_{12} + a_{13} = E\pi(a)E^{\perp} \overset{\delta}{\approx} EE^{\perp} = 0$$

である. よって, $T := \begin{pmatrix} a_{11}^{-1/2} & -a_{11}^{-1}a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on $K_0 \oplus K_1 \oplus K_2$ とおくと, $T \overset{4\delta}{\approx} 1$ である. したがって, Corollary 5.9 より, ある $b' \in A + \mathbb{C}1$ で, $b' \overset{16\delta}{\approx} 1$, $\pi(b'^*) = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1/2} & -a_{11}^{-1}a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ on $K_0 \oplus K_1 \oplus K_2$ を満たすものが存在する. すると,

$$\begin{aligned}
\pi(b'ab'^*) &= \begin{pmatrix} a_{11}^{-1/2} & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1/2} & -a_{11}^{-1}a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^{1/2} & a_{11}^{-1/2}a_{12} & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{-1/2} & -a_{11}^{-1}a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である. 今, $b'ab'^*$ は positive なので,

$$\pi(b'ab'^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

となり, $\pi(b'ab'^*)E = E$ がわかる.

ここで, $k := (b'ab'^*)^{1/2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\|k\|^2 = \|k^2\| = \|b'ab'^*\| &\leq \|(b'-1)ab'^*\| + \|ab'^*\| \\
&\leq (16\delta + 1)\|b'^*\| \\
&\leq (1 + 16\delta)^2
\end{aligned}$$

なので, $\|k\| \leq 1 + 16\delta$ である. $\psi\colon C(\mathrm{Sp}(k)) \to \mathrm{C}^*(k, 1)$ を functional calculus (Theorem 2.8) とする.

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (\text{if } 0 \leq x \leq 1 \text{ and } x \in \mathrm{Sp}(k)), \\ \frac{1}{x} & (\text{if } 1 < x \text{ and } x \in \mathrm{Sp}(k)) \end{cases}$$

とし, $f(k) := \psi(f)$ とおくと,

$$\|f(k) - 1\| \leq 1 - \frac{1}{1 + 16\delta} = \frac{16\delta}{1 + 16\delta} < 16\delta$$

である.

$$g(x) := x^2 f(x)^2 = \begin{cases} x^2 & (\text{if } 0 \le x \le 1 \text{ and } x \in \mathrm{Sp}(k)), \\ 1 & (\text{if } 1 < x \text{ and } x \in \mathrm{Sp}(k)) \end{cases}$$

とする. すると,

$$\pi(g(k)) = \pi(g(1))E = E$$
$$\|g(k)\| = \|k^2 f(k)^2\| \le 1$$

がわかる. 以上より, $b := f(k)b' \in A + \mathbb{C}1$ とおけば,

$$\begin{aligned} \|b - 1\| &= \|f(k)b' - 1\| \\ &\le \|f(k)b' - b' + b' - 1\| \\ &\le \|b'\|\|f(k) - 1\| + \|b' - 1\| \\ &\le (1 + 16\delta) \cdot 16\delta + 16\delta = 32\delta(1 + 8\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|bab^*\| &= \|f(k)b'ab'^* f(k)\| \\ &\le \|f(k)k^2 f(k)\| \le 1, \end{aligned}$$

$$\pi(bab^*)E = \pi(f(k)k^2 f(k))E = \pi(g(k))E = E$$

なので, δ を $\varepsilon \ge 32\delta(1 + 8\delta)$ を満たすように取ればよい. $\square$

Theorem 5.11. 任意の C*-algebra は, Property 1.3 を満たす.

Proof. 任意の $F \Subset A$, A の irreducible representation $\pi\colon A \to B(H)$, H 上の finite rank projection E, $\varepsilon > 0$ を取る. この $\varepsilon > 0$ に対し, Lemma 5.10 より, ある $\delta > 0$ が存在する. 今 $\pi(A)'' = B(H)$ より, $\pi(A)''$ は injective であるので, Lemma 5.7 より, ある net $T_\lambda \in A \odot A$ で, 以下の 1〜3 を満たすものが存在する.

1. $T_\lambda \in \mathrm{co}\{x \otimes x^* \mid x \in A,\ \|x\| \le 1\}$,
2. $\|L_a T_\lambda - R_a T_\lambda\|_\Lambda \to 0, \quad a \in A$,
3. $\pi(p(T_\lambda)) \xrightarrow{\sigma\text{-w}} 1$ in $B(H)$.

3 より, $\pi(p(T_\lambda)) \xrightarrow{\mathrm{s}} 1$ in $B(H)$ なので, $a \in K(H)$ に対し, $\pi(p(T_\lambda))a \xrightarrow{\mathrm{n}} a$ である. 特に,

3' $\pi(p(T_\lambda))E \xrightarrow{\mathrm{n}} E$

である. したがって 1, 2, 3' より, 適当な $\lambda_0 \in \Lambda$ を選べば, $\|x_i\| \le 1$ なる $x_i \in A$ と, $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ かつ $0 < t_i < 1$ なる $t_i \in \mathbb{R}$ が存在して, $T_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^n t_i(x_i \otimes x_i^*)$ と表せて,

$$\|L_a T_{\lambda_0} - R_a T_{\lambda_0}\|_\Lambda < \varepsilon, \quad a \in F,$$
$$\|\pi(p(T_{\lambda_0}))E - E\| < \delta$$

とできる．ここで, $y_i := t_i^{1/2}x_i$ とおくと, $\sum_{i=1}^n \|y_i\|^2 \le \sum_{i=1}^n t_i = 1$ であり, $T_{\lambda_0} = \sum_{i=1}^n y_i \otimes y_i^*$ かつ,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^n ay_i \otimes y_i^* - \sum_{i=1}^n y_i \otimes y_i^* a\right\|_\Lambda < \varepsilon, \quad a \in F, \\
&\left\|\pi\left(\sum_{i=1}^n y_i y_i^*\right) E - E\right\| < \delta
\end{aligned}$$

となる．今, π は irreducible なので, Lemma 5.10 より, ある $b \in A + \mathbb{C}1$ が存在して, $z := (z_1, z_2, \cdots, z_n) := (by_1, by_2, \cdots, by_n)$ とおくと, $\|b-1\| < \varepsilon$, $\|zz^*\| \le 1$, $\pi(zz^*)E = E$ を満たす．ここで, $\psi\colon A \odot A \to B(A)$ を $x \in A$ に対し, $\psi(a \otimes b)(x) := axb$ により定める．すると, $s := \sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i$ に対し,

$$\|\psi(s)\| = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^m a_i x b_i\right\| \,\middle|\, \|x\| \le 1\right\} \le \sum_{i=1}^m \|a_i\|\|b_i\|$$

なので, $\|\psi(s)\| \le \|s\|_\Lambda$ である．よって, ψ は norm-decreasing linear な map $\psi\colon A \mathbin{\widehat{\otimes}} A \to B(A)$ に拡張できる．以上より, $a \in F$, $x \in A$ に対し, $M := \max\{\|a\| \mid a \in F\}$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&\|\operatorname{ad} a \operatorname{Ad} z(x)\| \\
&= \left\|a\left(\sum_{i=1}^n z_i x z_i^*\right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i x z_i^*\right) a\right\| \\
&= \left\|\psi\left(\sum_{i=1}^n az_i \otimes z_i^*\right)(x) - \psi\left(\sum_{i=1}^n z_i \otimes z_i^* a\right)(x)\right\| \\
&\le \|\psi\| \left\|\sum_{i=1}^n az_i \otimes z_i^* - \sum_{i=1}^n z_i \otimes z_i^* a\right\|_\Lambda \|x\| \\
&\le \left(\left\|\sum_{i=1}^n az_i \otimes z_i^* - \sum_{i=1}^n ay_i \otimes y_i^*\right\|_\Lambda + \left\|\sum_{i=1}^n ay_i \otimes y_i^* - \sum_{i=1}^n y_i \otimes y_i^* a\right\|_\Lambda \right. \\
&\quad \left. + \left\|\sum_{i=1}^n y_i \otimes y_i^* a - \sum_{i=1}^n z_i \otimes z_i^* a\right\|_\Lambda\right) \|x\|
\end{aligned}$$

であるが,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^n az_i \otimes z_i^* - \sum_{i=1}^n ay_i \otimes y_i^*\right\|_\Lambda \\
&\le \left\|\sum_{i=1}^n aby_i \otimes y_i^* b^* - \sum_{i=1}^n aby_i \otimes y_i^*\right\|_\Lambda + \left\|\sum_{i=1}^n aby_i \otimes y_i^* - \sum_{i=1}^n ay_i \otimes y_i^*\right\|_\Lambda \\
&\le \left\|\sum_{i=1}^n aby_i \otimes y_i^*(b^*-1)\right\|_\Lambda + \left\|\sum_{i=1}^n a(b-1)y_i \otimes y_i^*\right\|_\Lambda \\
&\le \sum_{i=1}^n \|a\|\|b\|\|y_i\|^2\|b^*-1\| + \sum_{i=1}^n \|a\|\|b-1\|\|y_i\|^2 \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^2\right) \|a\|\|b-1\|(2+\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\leq M\varepsilon(2+\varepsilon) \leq 3M\varepsilon$$

なので,

$$\begin{aligned} \|\operatorname{ad} a \operatorname{Ad} z(x)\| &\leq (3M\varepsilon + \varepsilon + 3M\varepsilon)\|x\| \\ &= (6M+1)\varepsilon\|x\| \end{aligned}$$

より, $\|\operatorname{ad} a \operatorname{Ad} z\| \leq (6M+1)\varepsilon$ となるので, Property 1.3 を満たすことがわかった. □

参考文献

[1] C. A. Akemann, *The dual space of an operator algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **126** (1967), 286–302.

[2] O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 195–234.

[3] O. Bratteli, A. Kishimoto, *Homogeneity of the pure state space of the Cuntz algebra*, J. Funct. Anal. **171** (2000), 331–345.

[4] N. P. Brown, N. Ozawa, C*-algebras and finite-dimensional approximations, American Mathematical Society (2008).

[5] G. A. Elliott, E. J. Woods, *The equivalence of various definitions for a properly infinite von Neumann algebra to be approximately finite dimensional*, Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 175–178.

[6] G. A. Elliott, *On approximately finite-dimensional von Neumann algebras. II*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), 415–418.

[7] H. Futamura, N. Kataoka, A. Kishimoto, *Homogeneity of the pure state space for separable C^*-algebras*, Internat. J. Math. **12** (2001), 813–845.

[8] U. Haagerup, *All nuclear C^*-algebras are amenable*, Invent. Math. **74** (1983), 305–319.

[9] U. Haagerup, *The Grothendieck inequality for bilinear forms on C^*-algebras*, Adv. in Math. **56** (1985), 93–116.

[10] B. E. Johnson, R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Cohomology of operator algebras. III. Reduction to normal cohomology*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 73–96.

[11] A. Kishimoto, N. Ozawa, S. Sakai, *Homogeneity of the pure state space of a separable C^*-algebra*, Canad. Math. Bull. **46** (2003), 365–372.

[12] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory, Academic Press, Inc., Boston, MA (1990).

[13] G. K. Pedersen, Analysis now, Springer-Verlag, New York (1989).

[14] R. T. Powers, *Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 572–575.

[15] M. Takesaki, Theory of operator algebras I, Springer-Verlag, Berlin (1979).

[16] 梅垣 寿春, 大矢 雅則, 日合 文雄, 作用素代数入門, 共立出版株式会社 (1985).